ΘΕΜΑ Ι.

Α) $x^2+(2y-3)x+(y^2-3y+2)=0$

$\Delta=(2y-3)^2-4\cdot(y^2-3y+2)=\cancel{4y^2}-\cancel{12y}+9-\cancel{4y^2}+\cancel{12y}-8=1$

άρα $x=\dfrac{-2y+3\pm 1}{2}=\begin{cases} x=-y+2 \\ ή \\ x=-y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x+y-2=0 : \varepsilon_1 \\ ή \\ x+y-1=0 : \varepsilon_2 \end{matrix}$ με $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}$

Β) $(a+b-2)^2+(a+b-1)^2=2\cdot|a+b-2|\cdot|a+b-1|$

$\Leftrightarrow |a+b-2|^2+|a+b-1|^2-2\cdot|a+b-2|\cdot|a+b-1|=0$

$\Leftrightarrow (|a+b-2|-|a+b-1|)^2=0 \Leftrightarrow |a+b-2|=|a+b-1|$

$\Leftrightarrow \dfrac{|a+b-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a+b-1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)$

οπότε το Μ ανήκει στη μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ $(\varepsilon_1 // \varepsilon_2)$

Γ) $\begin{matrix} A=\lambda+1=0 \\ B=3-\lambda=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda=-1 \\ \lambda=3 \end{matrix}$ οπότε $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ άρα παριστάνει

ευθεία $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ με: $(x+3y)+\lambda\cdot(x-y+1)=0$

$\begin{matrix} x+3y=0 \\ x-y+1=0 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} x+3y=0 \\ -x+y-1=0 \end{matrix} \Bigg| \overset{(+)}{\Longleftrightarrow} y=\frac{1}{4}$ οπότε $x=-\frac{3}{4}$ άρα $A\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$

Δ) $(2)\overset{y=0}{\Longrightarrow}(\lambda+1)x=-\lambda$ οπότε:

αν $\lambda+1\neq 0$ τότε: $0=1$ άτοπο άρα $\lambda+1\neq 0$ οπότε: $x=\dfrac{-\lambda}{\lambda+1}$

άρα $B\left(\dfrac{-\lambda}{\lambda+1},0\right)$.

$(2)\overset{x=0}{\Longrightarrow}(3-\lambda)y=-\lambda$ οπότε:

αν $3-\lambda=0$ τότε: $0=-3$ άτοπο άρα $-\lambda+3\neq 0$ οπότε: $y=\dfrac{-\lambda}{3-\lambda}$

άρα $\Gamma\left(0,\dfrac{\lambda}{\lambda-3}\right)$

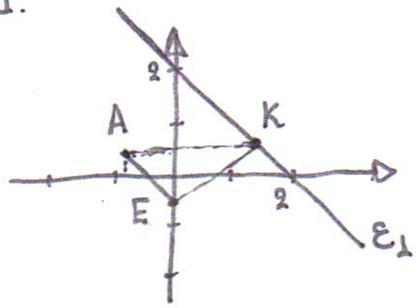
$\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{O\Gamma^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\frac{|\lambda|}{|\lambda+1|}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{|\lambda|}{|\lambda-3|}\right)^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda+1|^2}{|\lambda|^2}+\dfrac{|\lambda-3|^2}{|\lambda|^2}=1$

$\Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda+1+\cancel{\lambda^2}-6\lambda+9=\cancel{\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+10=0$ με $\Delta<0$

άρα αδύνατη

άρα $\nexists\, \lambda$ οπότε $\nexists$ τέτοια ευθεία.

Ε1.



Το Κ τυχαίο σημείο της ευθείας ε_1

$$\lambda_{AE} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{0+\frac{3}{4}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = -1 = \lambda_{\varepsilon_1} \Leftrightarrow AE \parallel \varepsilon_1$$

οπότε $d(K, AE) = d(E, \varepsilon_1) = \dfrac{|0-\frac{1}{2}-2|}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

Οπότε: $(AEK) = \frac{1}{2} AE \cdot d(K, AE) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{5\cancel{\sqrt{2}}}{4} \cdot \frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{4} = \frac{15}{16}$ τ.μ.

αφού $AE = \sqrt{\left(0+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{9}{16}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$