ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ Νο 8.

① $x^2 - 2(\lambda-1)x + \lambda + 5 = 0 \quad (1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

1) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-2(\lambda-1)]^2 - 4\cdot(\lambda+5) = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda - 20 =$

$= 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda - 20 = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16.$

2) Για να έχει η (1) δύο πραγματικές άνισες ρίζες πρέπει: $\Delta > 0$

δηλ $4\lambda^2 - 12\lambda - 16 > 0$

Βρίσκω ρίζες: $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$S = 3$ || $\lambda_1 = 4$

$P = -4$ || $\lambda_2 = -1$

λ	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$4\lambda^2-12\lambda-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

3) $\lambda = ;$ ώστε $|\underbrace{x_1 + x_2}_{S} + \underbrace{x_1 x_2}_{P}| = 3$

$|2(\lambda-1) + \lambda + 5| = 3$

$|2\lambda - 2 + \lambda + 5| = 3$

$|3\lambda + 3| = 3$

$3|\lambda + 1| = 3$

$|\lambda + 1| = 1$

$\lambda + 1 = 1$ ή $\lambda + 1 = -1$

$\lambda = 0$ ή $\lambda = -2$

απορρίπτεται

(2) $x^2-2\lambda x+2\lambda-4=0 \quad \lambda\in\mathbb{R} \quad (1)$

1) $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 4\lambda^2-4(2\lambda-4) = 4\lambda^2-8\lambda+16$

Έχουμε: $\Delta=0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-8\lambda+16=0$

$\Delta=-192<0$

άρα η $\Delta=0$ αδύνατη, επομένως $\Delta>0$ (ομόσημο του $\alpha=4>0$)

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ δηλ. η (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε λ.

2) Για να είναι οι ρίζες ομόσημες πρέπει $P>0$

$P=2\lambda-4>0$ ή $\lambda>2$

3) Θέλουμε $\underbrace{(x_1+x_2)}_{S}^2-5\underbrace{x_1x_2}_{P}\le 16$

$(2\lambda)^2-5(2\lambda-4)\le 16$

$4\lambda^2-10\lambda+20-16\le 0$

$4\lambda^2-10\lambda+4\le 0$

ρίζες: $2\lambda^2-5\lambda+2=0$

$\Delta=25-16=9$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{5\pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2}\end{cases}$

λ	$-\infty$		$1/2$		2		$+\infty$
$4\lambda^2-10\lambda+4$		+	0	−	0	+	

άρα $\lambda\in[1/2, 2]$

③ $(\lambda-2)x^2 - 2\lambda x + \lambda + 1 = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$

I) Για να είναι η (1) $1^{ου}$ βαθμού πρέπει : $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$
και τότε γίνεται : $-4x + 3 = 0$

II) Για να είναι $2^{ου}$ βαθμού πρέπει $\lambda \neq 2$

II) ρίζες πραγματικές και άνισες : $\Delta > 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4\lambda^2 - 4(\lambda-2)(\lambda+1)$$
$$= 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 + \lambda - 2\lambda - 2) = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda - 2)$$
$$= \cancel{4\lambda^2} - \cancel{4\lambda^2} + 4\lambda + 8 \quad > 0$$
$$\lambda > -\frac{8}{4}$$
$$\lambda > -2$$

II) θέλουμε $S = 2$
από (1) $S = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{2\lambda}{\lambda - 2}$

$$\frac{2\lambda}{\lambda-2} = 2 \Leftrightarrow \quad 2(\lambda-2) = 2\lambda$$
$$\cancel{2\lambda} - 4 = \cancel{2\lambda} \quad \text{αδύνατη}$$

④ $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$

1) 2 άνισες πραγματικές ρίζες : $\Delta > 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 1) = \cancel{4\lambda^2} - \cancel{4\lambda^2} + 4\lambda - 4$$
$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$
$$4\lambda - 4 > 0 \Leftrightarrow 4\lambda > 4 \Leftrightarrow \lambda > 1$$

2) μία διπλή ρίζα : $\Delta = 0$
$$4\lambda - 4 = 0$$
$$4\lambda = 4$$
$$\lambda = 1$$

3) 2 πραγματικές ρίζες : $\Delta \geq 0$

$$4\lambda - 4 \geq 0$$
$$\lambda \geq 1$$

4) αντίστροφες ρίζες: $P = 1$ και $\Delta \geq 0$

$\lambda \geq 1$

$$\cancel{\lambda^2} - \lambda + \cancel{1} = 1$$
$$\lambda^2 - \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$
$$\underset{\text{απορ.}}{\lambda = 0} \quad \text{ή} \quad \lambda = 1 \text{ δεκτή}$$

* Για $\lambda = 0$ η (1) γίνεται :

$x^2 + 1 = 0$ αδύνατη

Για $\lambda = 1$ η (1) γίνεται :

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$
$$x = 1 \quad (\text{διπλή})$$

5 $\quad \kappa x^2 - 2x - \kappa = 0 \quad \kappa \in \mathbb{R} \quad (1)$

1) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4 \cdot \kappa \cdot (-\kappa) = 4 + 4\kappa^2 > 0$ ως άθροισμα μη αρνητικών

2) (α) $\quad \overset{\alpha\downarrow}{x_1}, \overset{\beta\downarrow}{3}, \overset{\gamma\downarrow}{x_2}$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

$$x_1 + x_2 = S = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{2}{\kappa}$$

(β) $\quad \beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$ ή $\quad x_1 + x_2 = 6$

$$\frac{2}{\kappa} = 6$$
$$\kappa = \frac{1}{3}$$

⑥ $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$

1) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$

$\Delta = \cancel{4\lambda^2} - \cancel{4\lambda^2} + 16\lambda + 20$

2) 2 πραγματικές άνισες ρίζες: $\Delta > 0$

$16\lambda + 20 > 0$

$16\lambda > -20$

$\lambda > \frac{-20}{16}$

$\lambda > -\frac{5}{4}$

3) $\frac{1}{x_1}^{\,x_2} + \frac{1}{x_2}^{\,x_1} = \frac{1}{4}$

$\frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{1}{4}$

$\frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{1}{4}$ S P

$\frac{-2\lambda}{\lambda^2 - 4\lambda - 5} = \frac{1}{4}$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = -8\lambda$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 + 8\lambda = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

$S = -4 \quad \| \quad \lambda_1 = 1$ δεκτό.

$P = -5 \quad \| \quad \lambda_2 = -5$ απορ.

⑦ $x^2-(\lambda-2)x-2\lambda-1=0 \quad \lambda\in\mathbb{R} \quad (1)$

1) $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$

$\Delta = [-(\lambda-2)]^2-4(-2\lambda-1)$

$\Delta = \lambda^2-4\lambda+4+8\lambda+4$

$\Delta = \lambda^2+4\lambda+8$

έχω $\lambda^2+4\lambda+8=0$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 16-32=-16<0$ αδύνατη

άρα η $\Delta=\lambda^2+4\lambda+8>0$ για κάθε λ.

2) ετερόσημες ρίζες : $P<0$ και $\Delta>0$ $\lambda\in\mathbb{R}$

$-2\lambda-1<0$

$2\lambda>-1$

$\lambda>-\frac{1}{2}$

3) $|3x_1+\lambda+3x_2+x_1x_2|-2013<3$

$|3x_1+3x_2+\lambda+x_1x_2|<2016$

$|3(x_1+x_2)+\lambda+x_1x_2|<2016$

$|3(\lambda-2)+\lambda+(-2\lambda-1)|<2016$

$|3\lambda-6+\lambda-2\lambda-1|<2016$

$|2\lambda-7|<2016$

$-2016<2\lambda-7<2016$

$-2009<2\lambda<2023$

$-\frac{2009}{2}<\lambda<\frac{2023}{2}$