

ΘΕΜΑ Α'

i) $2 \cdot x^3 + 16 = 0$

$\Leftrightarrow 2 \cdot x^3 = -16$

$\Leftrightarrow x^3 = -8$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8}$

$\Leftrightarrow x = -2$

ii) $-x^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 = -4$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$

iii) $-2x^2 = 10 \cdot x$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 10x = 0$

$\Leftrightarrow -2 \cdot x \cdot (x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -5$

iv) $x^2 - x = -1$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$a = 1 \quad b = -1 \quad \gamma = 1$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4$

$= -3 < 0$

Αδύνατη στο \mathbb{R} .

v) $x^2 - 5|x| + 4 = 0$

$\Leftrightarrow |x|^2 - 5|x| + 4 = 0$

Θέτω: $|x| = w$

$w^2 - 5 \cdot w + 4 = 0$

$S = 5 \quad \parallel \quad w_1 = 4$

$P = 4 \quad \parallel \quad w_2 = 1$

$\Leftrightarrow w = 4 \quad \text{ή} \quad w = 1$

$\Leftrightarrow |x| = 4 \quad \text{ή} \quad |x| = 1$

$\Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -4 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$

vi) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Θέτω: $x^2 = w$

$w^2 - 5w + 4 = 0$

$S = 5 \quad \parallel \quad w_1 = 4$

$P = 4 \quad \parallel \quad w_2 = 1$

$\Leftrightarrow w = 4 \quad \text{ή} \quad w = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \quad \text{ή} \quad x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \quad \text{ή} \quad x = \pm\sqrt{1}$

$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$

vii) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$a = 3 \quad b = -4 \quad \gamma = 1$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot \gamma =$

$= (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{3}$

viii) $2 \cdot |x+7| - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2|x+7| = 4$

$\Leftrightarrow |x+7| = 2$

$\swarrow \quad \eta \quad \searrow$
 $x+7=2 \quad \quad \quad x+7=-2$

$\Leftrightarrow x = 2-7 \quad \quad \quad \Leftrightarrow x = -2-7$

$\Leftrightarrow x = -6 \quad \quad \quad \Leftrightarrow x = -9$

ix) $\frac{2 \cdot |x-3|}{3} - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \cancel{2} \cdot \frac{2|x-3|}{\cancel{3}} - 3 \cdot 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2|x-3| - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow 2|x-3| = 6 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-3| = 3$
 $\swarrow \quad \eta \quad \searrow$

$x-3=3 \quad \quad \quad x-3=-3$

$\Leftrightarrow x = 3+3 \quad \quad \quad \Leftrightarrow x = -3+3$

$\Leftrightarrow x = 6 \quad \quad \quad \Leftrightarrow x = 0$

x) $\frac{3 \cdot |x-7|}{2} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \cancel{2} \cdot \frac{3|x-7|}{\cancel{2}} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3|x-7| = -2 \quad \Leftrightarrow |x-7| = -\frac{2}{3}$ Αδύνατη.

ΘΕΜΑ Β ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΟΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ.

i) $-x^2 + 2x \leq 0 \quad (1)$

⊙ ΡΙΖΕΣ

$-x^2 + 2x = 0$
 $-x \cdot (x-2) = 0$
 $\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $x=0 \quad \eta \quad x=2$

⊙ ΠΙΝΑΚΑΚΙ

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-x^2+2x$	$ $	$-$	$+$	$ $

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

ii) $-x^2 + 4 \geq 0 \quad (1)$

Α' ΤΡΟΠΟΣ

⊙ ΡΙΖΕΣ

$-x^2 + 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 = 4$
 $\Leftrightarrow x = \pm 2$

⊙ ΠΙΝΑΚΑΚΙ

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$-x^2+4$	$-$	Φ	Φ	$-$

$\Leftrightarrow x \in [-2, 2]$

Β' ΤΡΟΠΟΣ

$-x^2 + 4 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x^2 \leq 4$
 $\Leftrightarrow |x| \leq 2$
 $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$
 $\Leftrightarrow x \in [-2, 2]$

iii) $-x^2 + 7x - 6 \geq 0$ (1)

⊙ ΠΙΖΕΣ

$-x^2 + 7x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

$S = 7 \parallel x_1 = 1$

$P = 6 \parallel x_2 = 6$

⊙ ΠΙΝΑΚΑΚΙ

x	$-\infty$	1	6	$+\infty$
$-x^2 + 7x - 6$	$-$	\emptyset	$+$	$-$

(1)
 $\Leftrightarrow x \in [1, 6]$

iv) $16 - x^2 \leq 0$ (1)

Α' ΤΡΟΠΟΣ

⊙ ΠΙΖΕΣ

$16 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 16$

$\Leftrightarrow x = \pm 4$

⊙ ΠΙΝΑΚΑΚΙ

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
$16 - x^2$	$-$	\emptyset	$+$	$-$

(1)
 $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

Β' ΤΡΟΠΟΣ

$16 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 16$

$\Leftrightarrow |x| \geq 4$

$\Leftrightarrow x \geq 4 \text{ ή } x \leq -4$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

v) $|2x - 4| - 7 \geq 0 \Leftrightarrow |2x - 4| \geq 7$

$\Leftrightarrow 2x - 4 \geq 7 \quad \text{ή} \quad 2x - 4 \leq -7$

$\Leftrightarrow 2x \geq 11 \quad \text{ή} \quad 2x \leq -3$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{11}{2} \quad \text{ή} \quad x \leq -\frac{3}{2}$

$x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{11}{2}, +\infty)$

vi) $2|2 - x| - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2|2 - x| \leq 6 \Leftrightarrow |2 - x| \leq 3$

$\Leftrightarrow -3 \leq 2 - x \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq -x \leq 1$

$\Leftrightarrow 5 \geq x \geq -1 \Leftrightarrow x \in [-1, 5]$

$$\text{vii) } 3|x-1| + 2|1-x| - 11|x-1| - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3|x-1| + 2|x-1| - 11|x-1| - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -6|x-1| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow |x-1| \leq -\frac{1}{3}, \text{ Αδύνατη.}$$

$$\text{viii) } |2x-3| + |3-2x| + 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |2x-3| + |2x-3| + 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2|2x-3| \leq -7$$

$$\Leftrightarrow |2x-3| \leq -\frac{7}{2}, \text{ Αδύνατη.}$$

$$\text{ix) } 3x^2 \geq 7x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x \geq 0 \quad (1)$$

⊙ ΠΙΣΕΣ

$$3x^2 - 7x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (3x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{7}{3}$$

⊙ ΠΙΝΑΚΑΚΙ

x	$-\infty$	0	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$3x^2 - 7x$	$\backslash \backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash \backslash$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{7}{3}, +\infty)$$

$$\text{x) } 3x^2 - 6 \geq 0 \quad (1)$$

⊙ ΠΙΣΕΣ

$$3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

⊙ ΠΙΝΑΚΑΚΙ

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$3x^2 - 6$	$\backslash \backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash \backslash$	$\backslash \backslash \backslash \backslash$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$$

ΘΕΜΑ Γ

ΝΑ ΒΡΕΘΟΥΝ ΤΑ ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

~σελ. 5~
ΑΛΓΕΒΡΑ Α'
ΕΡΓ. Ν° 7.

$$i) f(x) = \sqrt{9-x^2} + \frac{2}{x^3+1}$$

Πρέπει: $9-x^2 \geq 0$ και $x^3+1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

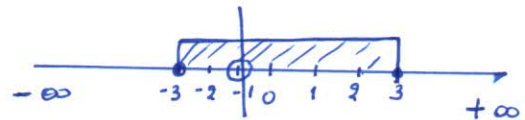
$$\Leftrightarrow x \in [-3, 3] \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1 \quad (2)$$

Από (1), (2):

$$A_f: [-3, -1) \cup (-1, 3]$$



$$ii) f(x) = \sqrt[3]{-x^2+x} + \frac{1}{x^2-1}$$

Πρέπει: $-x^2+x \geq 0$ (1) και $x^2 \neq 1$

• ΡΙΖΕΣ

$$-x^2+x=0$$

$$\Leftrightarrow -x(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ x=0 & \text{ή} & x=1 \end{matrix}$$

• ΠΙΝΑΚΑΚΙ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x^2+x$	-	0	0	-

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x \in [0, 1] \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x \neq \pm 1 \quad (3)$$

Από (2), (3): $A_f: [0, 1)$

$$\text{iii) } g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}} + \frac{\sqrt{2x+1}}{3x+2}$$

~σελ. 6~
ΑΛΓΕΒΡΑ Α'
ΕΡΓ. Ν° 7.

πρέπει: $x^2 - 4x + 3 > 0$ και $2x + 1 \geq 0$ και $3x + 2 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ (3) $\Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{3}$ (4)

• ΡΙΖΕΣ

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$S = 4 \parallel x_1 = 1$$

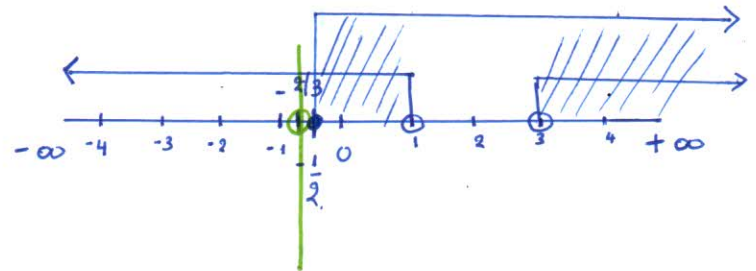
$$P = 3 \parallel x_2 = 3$$

• ΠΙΝΑΚΑΚΙ

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	-	-	+

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \text{ (2)}$$

Συναρμίσευση των (2), (3), (4):



Άρα, $A_g : \left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (3, +\infty)$

$$\text{iv) } g(x) = \frac{2x+1}{x} + \sqrt{|x-1|-2}$$

πρέπει: $x \neq 0$ ① και $|x-1|-2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow |x-1| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 \geq 2 \quad \eta \quad x-1 \leq -2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3 \quad \eta \quad x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty) \text{ ②}$$

Άπο ①, ②: $A_g : (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

$$v) h(x) = \sqrt[3]{2|x-1|-4} + \frac{x^3+1}{x^2-5x}$$

~ σε λ. + ~
 ΑΛΓΕΒΡΑ Α'
 ΕΡΓ. Ν° 7

Πρέπει: $2|x-1|-4 \geq 0$ και $x^2-5x \neq 0$

$$\Leftrightarrow |x-1| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 \geq 2 \text{ ή } x-1 \leq -2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3 \text{ ή } x \leq -1.$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty). \textcircled{1}$$



Άρα, $A_h : (-\infty, -1] \cup [3, 5) \cup (5, +\infty).$

$$vi) h(x) = \frac{2x-1}{|x|-2} + \sqrt{2|x|-4}$$

Πρέπει: $|x| \neq 2$ και $2|x|-4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq \pm 2 \textcircled{1} \text{ και } \Leftrightarrow |x| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ ή } x \leq -2.$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \textcircled{2}$$

Από $\textcircled{1}, \textcircled{2}$: $A_h = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$

Τρεις όροι α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου, αν ισχύει η σχέση:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

~ σελ. 8~
ΑΛΓΕΒΡΑ Α'
ΕΡΓ. Ν° 7.

i) $x^2, 3, 5x$

Οι παραπάνω όροι αποτελούν διαδοχικούς όρους α.π. :

$$3 = \frac{x^2 + 5x}{2} \Leftrightarrow x^2 + 5 \cdot x = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 \cdot x - 6 = 0.$$

$$S = -5 \parallel x_1 = -6$$

$$P = -6 \parallel x_2 = 5.$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \text{ ή } x = 5.$$

ii) $|2x-3|, 1, 2$

Οι παραπάνω όροι αποτελούν διαδοχικούς όρους α.π. :

$$1 = \frac{|2x-3| + 2}{2} \Leftrightarrow |2x-3| + 2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2x-3| = 2 - 2 \Leftrightarrow |2x-3| = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

iii) $|x-2|, 1, |2-4x|$

Οι παραπάνω όροι αποτελούν διαδοχικούς όρους α.π. :

$$1 = \frac{|x-2| + |2-4x|}{2} \Leftrightarrow |x-2| + |2-4x| = 2. \textcircled{1}$$

• $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

• $2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	-	+
$2-4x$	+	0	-	-

Διακρίνω περιπτώσεις:

1^η] Αν $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$, τότε η (1) γίνεται: $2 - x + 2 - 4x = 2$

$$\Leftrightarrow -5x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}.$$

2^H] Αν $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, τότε η (1) γίνεται:

$$\cancel{2} - x + 4x - \cancel{2} = 2 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

3^H] Αν $x \in [2, +\infty)$, τότε η (1) γίνεται:

$$x - 2 + 4x - 2 = 2 \Leftrightarrow 5x = 2 + 4 \Leftrightarrow 5 \cdot x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{5} \text{ απορ.}$$

(*) Λοδο, στην εξίσωση:

$$|x-2|, 2, |4-2x|$$

$$\text{Απο: } \frac{|x-2| + |4-2x|}{2} = 1 \Leftrightarrow |x-2| + |4-2x| = 2 \quad (1)$$

$$\text{αφω } |4-2x| = |2(2-x)| = |2||2-x| = 2|2-x| = 2|x-2|$$
$$\text{αφω } |x-2| = |2-x|, \forall x \in \mathbb{R}$$

Απο η (1) κερδιστά γραφεται:

$$|x-2| + 2|x-2| = 2 \Leftrightarrow 3|x-2| = 2 \Leftrightarrow |x-2| = \frac{2}{3}$$

$$\text{Απο: } x-2 = \frac{2}{3} \quad \eta \quad x-2 = -\frac{2}{3}$$
$$x = 2 + \frac{2}{3} \quad x = 2 - \frac{2}{3}$$
$$x = \frac{8}{3} \quad x = \frac{4}{3}$$

