ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ Ν≡3. 25/10/2016.

ΘΕΜΑ Α

i) **Λάθος** διότι όταν πολλαπλασιάζουμε ανίσωση με αρνητικό αριθμό η φορά αλλάζει.

ii) $\alpha^2+\beta^2>0$ τότε $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$. **Λάθος**

αρκεί ένα τουλάχιστον από τα α,β να είναι $\neq 0$ όχι απαραίτητα και οι δύο

άρα το σωστό είναι $\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$

iii) $\left.\begin{matrix}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{matrix}\right\| \Rightarrow \alpha-\gamma>\beta-\delta$, **Λάθος** ΔΕΝ ΑΦΑΙΡΟΥΜΕ ΠΟΤΕ

Ανισώσεις κατά μέλη

η σωστή διαδικασία είναι:

$$\begin{matrix}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha>\beta\\ -\gamma<-\delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha>\beta\\ -\delta>-\gamma\end{cases} \Big\| \overset{\oplus}{\Rightarrow} \alpha-\delta>\beta-\gamma.$$

iv) **Λάθος** αν α,β είναι ετερόσημοι τότε $\alpha\cdot\beta<0$

v) $(\alpha-1)^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ και $\beta=0$

Είναι **σωστό** διότι το $(\alpha-1)^2$ και β^2 ως τέλεια τετράγωνα είναι μη αρνητικές ποσότητες άρα δεν μπορούν να είναι αντίθετες ποσότητες άρα πρέπει το καθένα να ισούται με μηδέν.

Γενικά

$$\boxed{\begin{matrix} x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ και } y=0\\ x^2+y^2\leq 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ και } y=0\\ |x|+|y|=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ και } y=0\\ |x|+|y|\leq 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ και } y=0\end{matrix}}$$

ΘΕΜΑ Β

α) Έστω ότι

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\geq 2\beta(3\alpha-5\beta) \Leftrightarrow$

$\alpha^2-\beta^2\geq 6\beta\alpha-10\beta^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-\beta^2-6\alpha\beta+10\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-3\beta)^2\geq 0$, αληθές

Τλ

β) Έστω ότι

$$(a^2+1)(\beta^2+4) \geq (a\beta+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2\beta^2+4a^2+\beta^2+4 \geq (a\beta)^2+4a\beta+4 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{a^2\beta^2}+4a^2+\beta^2+\cancel{4}-\cancel{a^2\beta^2}-4a\beta-\cancel{4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$4a^2-4a\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2a-\beta)^2 \geq 0,\ \text{αληθές}$$

γ) Έστω ότι: $a^2+9 \geq 3a(-a+4) \Leftrightarrow$

$$a^2+9 \geq -3a^2+12a \Leftrightarrow$$

$$a^2+9+3a^2-12a \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$4a^2-12a+9 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2a-3)^2 \geq 0$$

B2) α) Αν $a<3<\beta$ ΝΑΟ $9+a\beta<3a+3\beta$

Έστω ότι:

$$9+a\beta<3a+3\beta \Leftrightarrow$$

$$9+a\beta-3a-3\beta<0 \Leftrightarrow$$

$$3(3-a)+\beta(a-3)<0 \Leftrightarrow$$

$$3(3-a)-\beta(3-a)<0 \Leftrightarrow$$

$(3-a)(3-\beta)<0$, αληθές διότι από δεδομένα ισχύουν:

$a<3 \Leftrightarrow 3-a>0$

και $3<\beta \Leftrightarrow 3-\beta<0$

β) Αν $a>2$ ΝΑΟ $a^3+a>2a^2+2$

Έστω ότι $a^3+a>2a^2+2 \Leftrightarrow$

$$a^3+a-2a^2-2>0 \Leftrightarrow$$

$$a^2(a-2)+a-2>0 \Leftrightarrow$$

$(a-2)(a^2+1)>0$ αληθές διότι από δεδομένα: ισχύουν:

$a>2 \Leftrightarrow a-2>0$

και $a^2+1>0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

αν $a \le -2$ ναδ $a(a+3) \le a^2 - 2(a+5)$

Έστω ότι $a(a+3) \le a^2 - 2(a+5) \Leftrightarrow$

$\cancel{a^2} + 3a \le \cancel{a^2} - 2a - 10 \Leftrightarrow$

$3a + 2a + 10 \le 0 \Leftrightarrow$

$5a + 10 \le 0 \Leftrightarrow$

$5(a+2) \le 0$, αληθές, διότι από δεδομένα ισχύει $a \le -2 \Leftrightarrow a+2 \le 0$

Αφού a, β ετερόσημοι ισχύει $a \cdot \beta < 0$

Έστω ότι $\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} \le -2 \Leftrightarrow$ επί $= a\beta < 0$

$a\beta \frac{a}{\beta} + a\beta \frac{\beta}{a} \ge -2a\beta \Leftrightarrow$

$a^2 + \beta^2 + 2a\beta \ge 0 \Leftrightarrow (a+\beta)^2 \ge 0$, αληθές.

ΜΑΣ

ⓐ $2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 1 \ge 0$

$x^2 + 2x + 1 + x^2 + y^2 - 2xy \ge 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)^2 + (x-y)^2 \ge 0$, αληθές

Η ισότητα ισχύει όταν:

$x+1=0$ και $x-y=0$

$x=-1$ $\quad$ $y=x$

$y=-1$

β) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = 0$

$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 0$

$x-5=0$ και $y+2=0$

$x=5$ $\quad$ $y=-2$

ⓥ $2x^2 + 1 + 2xy - 2x + y^2 \le 0$

$x^2 + 1 - 2x + x^2 + 2xy + y^2 \le 0$

$(x-1)^2 + (x+y)^2 \le 0$

$x-1=0$ και $x+y=0$

$x=1$ $\quad$ $y=-x$

$y=-1$

Γ2 α) Αν $\alpha<-2$ και $\beta>-1$

Να συγκρίθουν $\alpha\beta+2$ και $-\alpha-2\beta$

Έστω $A=\alpha\beta+2$ και $B=-\alpha-2\beta$

Τότε

$$A-B=\alpha\beta+2-(-\alpha-2\beta)$$
$$=\alpha\beta+2+\alpha+2\beta$$
$$=\alpha(\beta+1)+2(1+\beta)$$
$$=(\beta+1)(\alpha+2)<0,$$ διότι στο δεδομένα $\alpha<-2 \Leftrightarrow \alpha+2<0$

και $\beta>-1 \Leftrightarrow \beta+1>0$

Άρα αφού

$A-B<0 \Leftrightarrow A<B$

β) Αν $\alpha<\beta<0$ να συγκρίθουν:

$\alpha^2+\frac{1}{\alpha}$ και $\beta^2+\frac{1}{\beta}$

Έστω $A=\alpha^2+\frac{1}{\alpha}$ και $B=\beta^2+\frac{1}{\beta}$

Τότε

$$A-B=\alpha^2+\frac{1}{\alpha}-\left(\beta^2+\frac{1}{\beta}\right)=$$
$$=\alpha^2+\frac{1}{\alpha}-\beta^2-\frac{1}{\beta}=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}$$

από δεδομένα: $\cdot\ \alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$

$\cdot\ \alpha<\beta \Leftrightarrow \beta-\alpha>0$

$\cdot\ \alpha>0$ και $\beta>0$ άρα $\alpha\cdot\beta>0$ και $\alpha+\beta>0$

Επομένως $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\cancel{<}0$ και $\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}<0$

Άρα $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}<0$ Άρα $A-B<0$ Άρα $A<B$.

Θέμα Δ

Δ1)

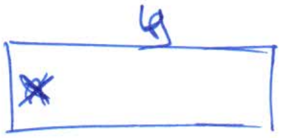
α) $\begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \le 2x \le 6 \\ -3 \ge -3y \ge -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \le 2x \le 6 \\ -6 \le -3y \le -3 \end{cases} \Big\| \oplus$

$-2 \le 2x - 3y \le 3 \Rightarrow 0 \le 2x - 3y + 2 \le 5$.

β) $\begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ 1 \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1 \end{cases} \Big\| \odot \ 1 \le \frac{x}{y} \le 3$.

Δ2)

α)



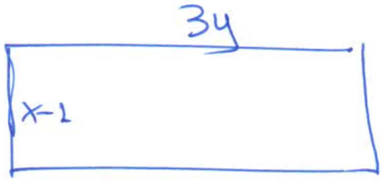
Περίμετρος $\Pi = 2x + 2y$

Εμβαδό $E = x \cdot y$

- $\begin{cases} 4 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 \le 2x \le 14 \\ 4 \le 2y \le 6 \end{cases} \Big\| \Rightarrow 12 \le 2x + 2y \le 20 \Rightarrow 12 \le \Pi \le 20$

- $\begin{cases} 4 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases} \Big\| \odot \ 8 \le x \cdot y \le 21 \Rightarrow 8 \le E \le 21$

β)



Νέα περίμετρος

$\Pi' = 2(x-1) + 2 \cdot 3y = 2x + 6y - 2$

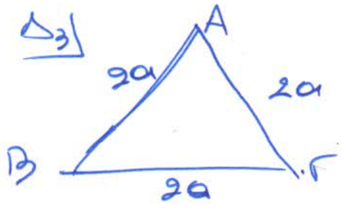
Νέο εμβαδόν $E' = (x-1) \cdot 3y$.

Άρα. $\begin{cases} 4 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 \le 2x \le 14 \\ 12 \le 6y \le 18 \end{cases} \Big\| \oplus \ 20 \le 2x + 6y \le 32 \Rightarrow 18 \le 2x + 6y - 2 \le 30$

$\Rightarrow 18 \le \Pi' \le 30$.

- $\begin{cases} 4 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \le x - 1 \le 6 \\ 6 \le 3y \le 9 \end{cases} \Big\| \odot \ 18 \le (x-1) \cdot 3y \le 54 \Rightarrow 18 \le E' \le 54$

Δ3)



Περίμετρος $\Pi = 2\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 6\alpha$

Άρα $2 \le \alpha \le 5 \Rightarrow 12 \le 6\alpha \le 30 \Rightarrow$

$12 \le \Pi \le 30$.