ΕΡΓΑΣΙΑ Νο 2 ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ.

20/11/2016

Θέμα Α

i) **Λάθος** διότι το Π.Ο. $A_f=[-1,1)$ δεν είναι συμμετρικό σύνολο δηλαδή δεν ισχύει το $\forall x\in A$ και $-x\in A$ αφού $-1\in A_f$ ενώ $1\notin A_f$.

ii) **Λάθος** Ισχύει $2016<2017 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(2016)>f(2017)$

iii) **Λάθος** η $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα

iv) **Σωστό** Αφού $A(1,0)\in C_f$ ισχύει $f(1)=0$, άρα $x_0=1$ είναι ρίζα στη εξίσωση $f(x)=0$, και αφού f γνησίως μονότονη η $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Άρα $x=1$ μοναδική.

v) **Λάθος** $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+x)=-\eta\mu x$

vi) **Σωστό**

vii) **Σωστό** Αφού $(\eta\mu x-2)^2+(\sigma\upsilon\nu x+2)^2=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=2$ και $\sigma\upsilon\nu x=-2$, άτοπο αφού $\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύουν $-1\leq\eta\mu x\leq 1$ και $-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$

viii) **Λάθος** αφού $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x<0$.

ix) **Σωστό**

x) **Λάθος** Διότι αν $g(x)=2x^2-1$ τότε η συνάρτηση f που προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_g κατά 3 μονάδες δεξιά και 2 κατακόρυφα πάνω είναι η $f(x)=g(x-3)+2=2(x-3)^2-1+2$
$=2(x-3)^2+1$

Θέμα Β

B1

i) $\Sigma: \begin{cases} x-ay=-8\beta \\ ax+\beta y=7 \end{cases}$ αντικαθιστώ σ' αυτό $x=2$ και $y=-3$ αφού το Σ έχει λύση την $(2,-3)$ και προκύπτει σύστημα με αγνώστους τα a,β

Άρα $\begin{cases} 2+3a=-8\beta \\ 2a-3\beta=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+8\beta=-2 \\ 2a-3\beta=7 \end{cases} \xrightarrow[(-3)]{(2)} \begin{cases} 6a+16\beta=-4 \\ -6a+9\beta=-21 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 25\beta=-25$

$\Rightarrow \beta=-1$ τότε από τη σχέση $2a-3\beta=7$ προκύπτει $2a=4 \Leftrightarrow a=2$

Άρα $(a,\beta)=(2,-1)$

(4) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -1$ τότε

(α) $f(x) = -x^2 + 2x + \gamma$.

άρα $A(0,-3) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = -3 \Leftrightarrow -0^2 + 2\cdot 0 + \gamma = -3 \Leftrightarrow \gamma = -3$.

Άρα τελικά: $f(x) = -x^2 + 2x - 3,\ x \in \mathbb{R}$

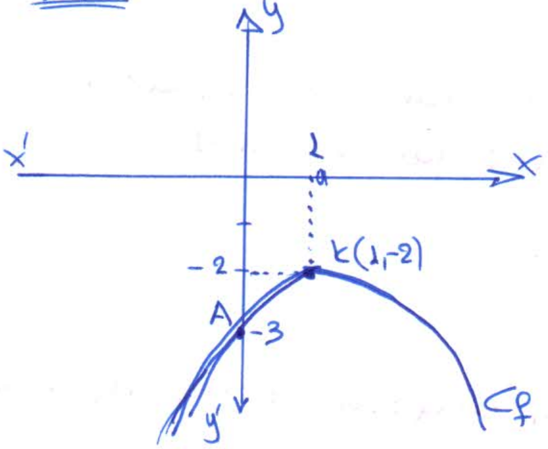
(β) • $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right) \overset{\Delta = -8}{=\!=\!=} \left(-\frac{2}{-2}, -\frac{-8}{-4}\right) = (1, -2)$

• Σημεία τομής C_f με $x'x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 3 = 0$, αδύνατη άρα $\Delta < 0$

άρα η C_f δεν τέμνει τον $x'x$ σε κανένα σημείο

• Σημεία τομής C_f με $y'y \Leftrightarrow y = f(0) = -3$ άρα $A(0,-3)$.

Άρα



(γ) $f \nearrow$ στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$

και $f \searrow$ στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$.

Επίσης η f παρουσιάζει Ο.Μ. στη θέση $x_0 = 1$ με τιμή $f(1) = -2$

δηλαδή ισχύει:

$f(x) \leq -2 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1),\ \forall x \in \mathbb{R}$

δ) Από C_f παρατηρώ ότι δεν είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ (άρα δεν είναι άρτια) ούτε είναι συμμετρική ως προς το $O(0,0)$ (άρα ούτε περιττή)

ή

$A_f = \mathbb{R}$, συμμετρικό σύνολο, άρα

• $\forall x \in A_f$ και $-x \in A_f$

• $f(-x) = -(-x)^2 + 2(-x) - 3 = -x^2 - 2x - 3$.

Παρατηρώ ότι η $f(-x)$ είναι διαφορετική από την $f(x)$ ($f(x) = -x^2 + 2x - 3$)

επίσης είναι διαφορετική και από την $-f(x)$ ($-f(x) = x^2 - 2x + 3$)

Άρα ούτε άρτια - ούτε περιττή

ε) $f(x)>0 \Leftrightarrow -x^2+2x-3>0$

$$\boxed{\begin{array}{c} -x^2+2x-3=0 \\ \Delta=-8 \\ \text{αδύνατη} \end{array}}$$

άρα η f είναι ομόσημη του $\alpha=-1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

άρα $-x^2+2x-3<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$-x^2+2x-3$	$-$

Επομένως η ανίσωση $-x^2+2x-3>0$ είναι αδύνατη.

(η) από σχήμα C_f κάτω από $x'x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ άρα $f(x)<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ άρα $f(x)>0$ θα είναι αδύνατη

στ) από ε) έχουμε δείξει ότι $f(x)<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ άρα η C_f βρίσκεται κάτω του $x'x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ (η)

ζ) $g(x)=-x^3-2x+1$

$A_g=\mathbb{R}$

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ $\begin{cases} x_1^3<x_2^3 \Rightarrow -x_1^3>-x_2^3 \\ -2x_1>-2x_2 \Rightarrow -2x_1+1>-2x_2+1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} g(x_1)>g(x_2)$, άρα $g \downarrow \mathbb{R}$

Για την εύρεση των σημείων τομής των C_f και C_g λύνω την εξίσωση: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -x^2+2x-3=-x^3-2x+1 \Leftrightarrow$

$x^3+2x-1-x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow$

$x^3-x^2+4x-4=0$

α' τρόπος (Horner)

1	−1	4	−4	ρ=1
	1	0	4	
1	0	4	0	

$(x-1)(x^2+4)=0$

$x-1=0$ ή $x^2+4=0$

$x=1$. αδύνατη αφού $x^2+4>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

β' τρόπος (ομαδοποίηση)

$x^3-x^2+4x-4=0$

$x^2(x-1)+4(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+4)=0$

$x=1$ ή $x^2+4=0$ αδύνατο.

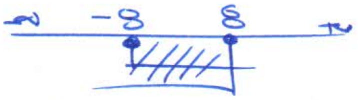
Άρα η C_f τέμνει την C_g στο σημείο $A(1,f(1))=(1,-2)$

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=\sqrt{8-x}+\sqrt{8+x}$

πρέπει $8-x\geq 0$ και $8+x\geq 0$

$x\leq 8$ $x\geq -8$



Άρα $A_f = [-8, 8]$

β) $A_f = [-8, 8]$ άρα ισχύει:

- $\forall x \in A_f$ και $-x \in A_f$
- $f(-x) = \sqrt{8-(-x)} - \sqrt{8-x} = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x} = -f(x),\ \forall x \in A_f$ Άρα f περιττή στο A_f

$-f(x) = -(\sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}) =$
$= \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$

γ)

Σωστό το σχ. 3

και $-8 \le x \le 8 \overset{f \downarrow}{\Longrightarrow} f(-8) \ge f(x) \ge f(8) \iff 4 \ge f(x) \ge -4$

Άρα $\max f = 4$ για $x = -8$ και $\min f = -4$ για $x = 8$

δ) $g(x) = f(x) - 3$

αλγεβρικά

$A_g = [-8, 8]$

- $\forall x \in A_g$ και $-x \in A_g$
- $g(-x) = f(-x) - 3$
$= -f(x) - 3$

Παρατηρώ ότι

$g(x) = f(x) - 3$

και $-g(x) = -f(x) + 3$

Άρα $g(-x) \ne g(x)$

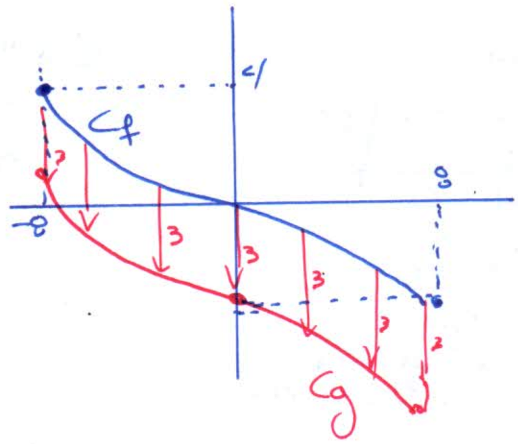
και $g(-x) \ne -g(x)$

Άρα g ούτε άρτια ούτε περιττή

γεωμετρικά

Η C_g προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά 3 μονάδες κατακόρυφα προς τα κάτω

Άρα η C_g δεν είναι πλέον συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ (άρα δεν είναι περιττή) ούτε και ως προς τον άξονα $y'y$ (άρα δεν είναι ούτε άρτια)



Αλγεβρικά

Για την $h(x) = f(x+3) = \sqrt{8-(x+3)} - \sqrt{8+x+3} = \sqrt{5-x} - \sqrt{x+11}$

Πρέπει $5-x \geq 0$ και $x \geq -11$
$x \leq 5$

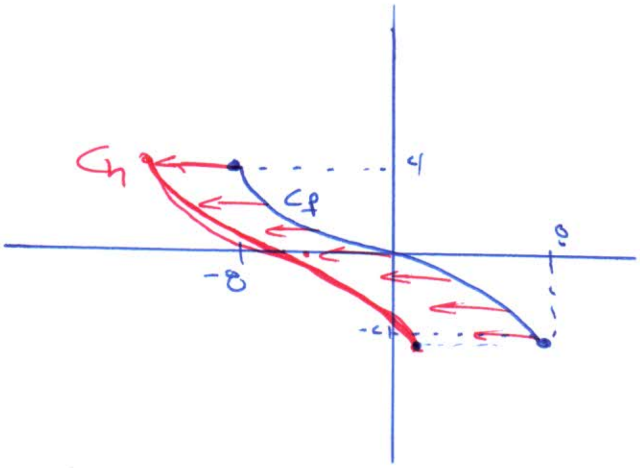
άρα $A_h = [-11, 5]$ το οποίο δεν είναι συμμετρικό σύνολο

άρα δεν ισχύει το $\forall x \in A_h$ και $-x \in A_h$.

Άρα h ούτε άρτια ούτε περιττή

Γεωμετρικά

Η h προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της f κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά. Άρα η C_h της θα είναι



Παρατηρώ ότι η C_h δεν είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα y'y (άρα δεν είναι άρτια) ούτε ως προς την αρχή O(0,0) (άρα δεν είναι περιττή).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

(α) και $(\sigma\upsilon\nu x + 2)(5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -2$ ή $5\sigma\upsilon\nu x = 4 \Leftrightarrow \boxed{\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}}$

αδύνατο διότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$

(β) Από $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow$
$\eta\mu^2 x + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{25}{25} - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm\frac{3}{5}$

Όμως $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ άρα πρέπει $\eta\mu x > 0$ άρα δεκτό $\boxed{\eta\mu x = \frac{3}{5}}$.

άρα $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ και $\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = \frac{4}{3}$

γ) $A = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \varepsilon\varphi x}{\eta\mu x \cdot \sigma\varphi x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi x = \frac{3}{4}$.

Δ2) $\alpha = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)\ \eta\mu(6\pi+x)\ \varepsilon\varphi(\pi-x)}{\eta\mu(15\pi+x)\cdot\eta\mu(-x)\ \sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)}$

(α)

• $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi+\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(4\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\eta\mu x$

• $\eta\mu(6\pi+x)=\eta\mu x$

• $\varepsilon\varphi(\pi-x)=-\varepsilon\varphi x$

• $\eta\mu(15\pi+x)=\eta\mu(14\pi+\pi+x)=\eta\mu(\pi+x)=-\eta\mu x$

• $\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$

• $\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(\frac{20\pi+\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x$

Άρα: $\alpha=\dfrac{-\cancel{\eta\mu x}\cdot\cancel{\eta\mu x}\cdot(-\cancel{\varepsilon\varphi x})}{-\cancel{\eta\mu x}\cdot\cancel{\eta\mu x}\cdot\cancel{\varepsilon\varphi x}}=-1$

(β) $f(x)=-3\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\alpha=-3\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-1$

• $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ sec

• $-1\le\sigma\upsilon\nu 2x\le 1 \Leftrightarrow 3\ge -3\sigma\upsilon\nu 2x\ge -3 \Leftrightarrow 2\ge -3\sigma\upsilon\nu 2x-1\ge -4$

$\Leftrightarrow -4\le f(x)\le 2$

Άρα $\max f=2$ και $\min f=-4$.

Δ3) $f(x)=\eta\mu(\pi-3x)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\beta$

(α),(β)

Ισχύει $\eta\mu(\pi-3x)=\eta\mu 3x$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\eta\mu 3x$

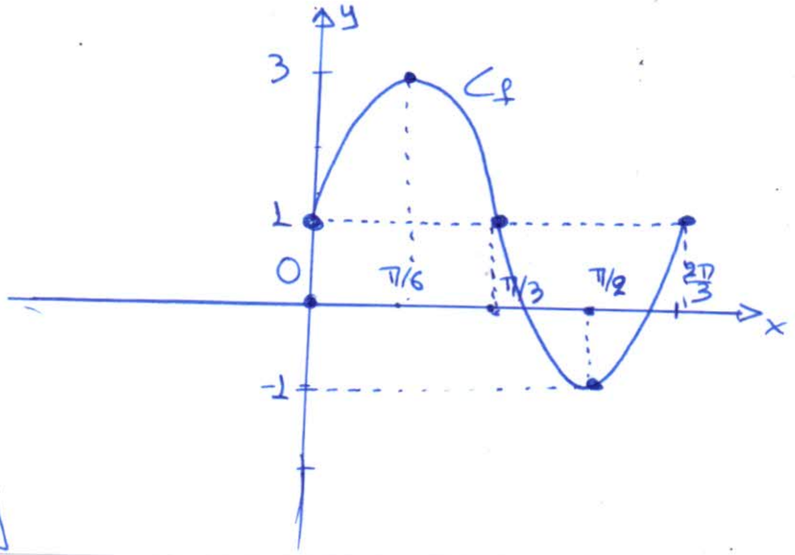
Άρα: $f(x)=2\cdot\eta\mu 3x+\beta$

και $A(0,1)\in C_f \Leftrightarrow f(0)=1 \Leftrightarrow 2\cdot\eta\mu 0+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=1$.

Άρα $\boxed{f(x)=2\cdot\eta\mu 3x+1}$

(γ) $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$

x	$\frac{0}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
ημ3x	0	1	0	−1	0
2ημ3x+1	1	3		−1	
f(x)	1	3		−1	



Δ1)

α) $f(x)=\frac{ημ^2x}{1-συνx}=\frac{1-συν^2x}{1-συνx}=\frac{\cancel{(1-συνx)}(1+συνx)}{\cancel{1-συνx}}=1+συνx$

$\Leftrightarrow \boxed{f(x)=συνx+1},\ x\in\mathbb{R}$

β) · $ημ(5π+x)=ημ(4π+π+x)=ημ(π+x)=-ημx$

· $συν\left(\frac{17π}{2}+x\right)=συν\left(\frac{16π+π}{2}+x\right)=συν\left(8π+\frac{π}{2}+x\right)=συν\left(\frac{π}{2}+x\right)=-ημx$

· $συν\left(\frac{7π}{2}+x\right)=συν\left(\frac{4π+3π}{2}+x\right)=συν\left(2π+\frac{3π}{2}+x\right)=συν\left(\frac{3π}{2}+x\right)=ημx$

· $συν^2\left(\frac{π}{2}+x\right)=\left[συν\left(\frac{π}{2}+x\right)\right]^2=\left[-ημx\right]^2=ημ^2x$

Δ2)

$g(x)=\frac{-ημx\cdot(-ημx)\cdot ημx}{ημ^2x}=ημx \Leftrightarrow \boxed{g(x)=ημx},\ x\in\mathbb{R}$

γ) Έστω ότι: $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2-f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow \frac{ημx}{1+συνx}=\frac{2-(συνx+1)}{ημx} \Leftrightarrow \frac{ημx}{1+συνx}=\frac{1-συνx}{ημx}$

$\Leftrightarrow ημ^2x=(1+συνx)(1-συνx) \Leftrightarrow ημ^2x=1-συν^2x \Leftrightarrow ημ^2x+συν^2x=1$, αληθές

Δ5)

$α^3+β^3=(α+β)(α^2-αβ+β^2)$

· $ημ^3x+συν^3x=(ημx+συνx)(ημ^2x-ημx\cdot συνx+συν^2x)=(ημx+συνx)(1-ημxσυνx)$

$(α-β)^3=α^3-3α^2β+3αβ^2-β^3$

· $(ημx-συνx)^3=ημ^3x-3ημ^2xσυνx+3ημx\cdot συν^2x-συν^3x$

$α^2-β^2=(α-β)(α+β)$

· $ημ^2x-συν^2x=(ημx-συνx)(ημx+συνx)$

$(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$

· $(ημx+συνx)^2=ημ^2x+2ημx\cdot συνx+συν^2x=1+2ημx\cdot συνx$

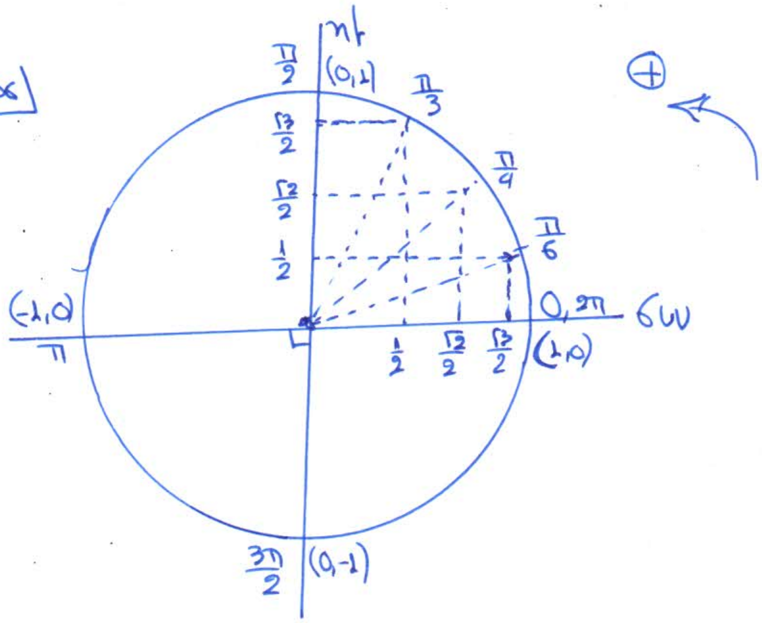
$(α+β)^3=α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3$

· $(ημx+συνx)^3=ημ^3x+3ημ^2xσυνx+3ημxσυν^2x+συν^3x$

$α^3-β^3=(α-β)(α^2+αβ+β^2)$

· $εφ^3x-σφ^3x=(εφx-σφx)(εφ^2x+\underbrace{εφx\cdot σφx}_{=1}+σφ^2x)$

Δε



- $ημ\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$
- $συν\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$
- $εφ\frac{\pi}{4}=1$
- $εφ\frac{3\pi}{4}=εφ\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=εφ\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-εφ\frac{\pi}{4}=-1$
- $σφ\frac{\pi}{4}=1$
- $συν\frac{2\pi}{3}=συν\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)=συν\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-συν\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$
- $εφ\frac{5\pi}{4}=εφ\left(\frac{4\pi+\pi}{4}\right)=εφ\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=εφ\frac{\pi}{4}=1$
- $συν\frac{7\pi}{4}=συν\left(\frac{8\pi-\pi}{4}\right)=συν\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=συν\left(-\frac{\pi}{4}\right)=συν\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $ημ\frac{9\pi}{2}=συν\left(\frac{8\pi+\pi}{2}\right)=συν\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)=συν\frac{\pi}{2}=0$
- $εφ\frac{5\pi}{4}=εφ\left(\frac{4\pi+\pi}{4}\right)=εφ\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=εφ\frac{\pi}{4}=1$
- $συν\frac{7\pi}{2}=συν\left(\frac{8\pi-\pi}{2}\right)=συν(4\pi-\pi)=συν(-\pi)=συν\pi=-1$
- $ημ9\pi=ημ(8\pi+\pi)=ημ\pi=0$
- $συν\frac{9\pi}{4}=συν\left(\frac{8\pi+\pi}{4}\right)=συν\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=συν\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}/2$