ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ Νο 3.

Άσκηση 1

$$\begin{cases} x-2y=8 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \quad (2) \end{cases}$$

α) Πρέπει $D\neq 0$ και να επαληθεύω τη γραμμική εξίσωση (2).

$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta+2\alpha \neq 0$ (3)

και η (2) για $x=2, y=-3$ έχουμε: $2\alpha-3\beta=\gamma$ (4)

Άρα για $\alpha=1$, $\beta=3$ και $\gamma=7$ ικανοποιούνται οι σχέσεις (3), (4)

β) Πρέπει να ισχύει $D=0$ και $\gamma\neq 8$.

$\Leftrightarrow \beta+2\alpha=0 \Leftrightarrow \beta=-2\alpha$ και $\gamma\neq 8$

άρα για $\alpha=1$ τότε $\beta=-2$ και $\gamma=1$

Άσκηση 2

α) α' σκέψη

μέσω συστήματος:

$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ (\lambda-1)x-y=6 \end{cases}$$

Πρέπει το Σ να είναι αδύνατο, άρα θέλω

$D=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \lambda-1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$-2+\lambda-1=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=3}$

Πράγματι για $\lambda=3$ έχουμε

$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 2x-y=6 \end{cases}$$ το σύστημα

είναι αδύνατο άρα οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

β' σκέψη

γράφω τις ευθείες σε κανονική μορφή $y=\alpha x+\beta$ και αφού οι συντελεστές διεύθυνσης να είναι ίσοι.

Έχουμε:

$\varepsilon_1: \ y=2x+1$

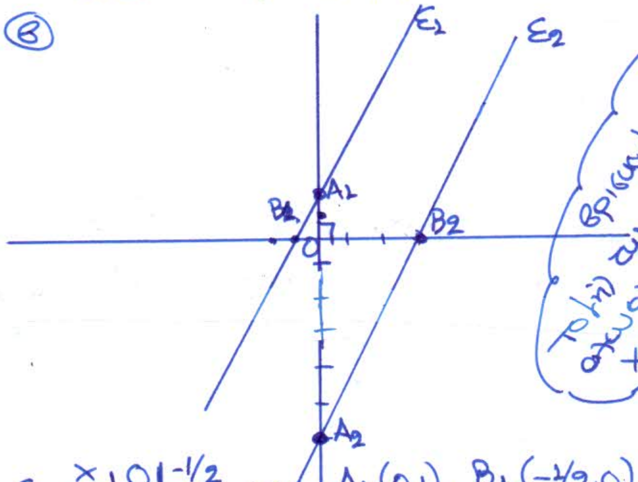
$\varepsilon_2: \ y=(\lambda-1)x-6$

για να είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ πρέπει $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1\neq\beta_2$

Άρα $2=\lambda-1 \Leftrightarrow$ και $1\neq -6$

$\boxed{\lambda=3}$

β)



βρίσκουμε τα σημεία τομής των ε1, ε2 με τους άξονες θέτοντας μια φορά x=0 και μια φορά y=0

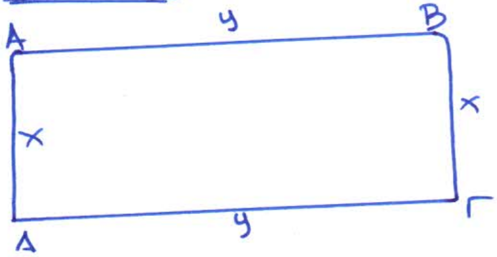
ε_1: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1/2 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$ άρα $A_1(0,1)$, $B_1(-1/2,0)$

ε_2: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & -6 & 0 \end{array}$ άρα $A_2(0,-6)$, $B_2(3,0)$

γ) ΟΧΙ διότι για να ταυτίζονται πρέπει να ισχύει $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$ και ενώ για $\lambda=3$ έχουμε το $\alpha_1=\alpha_2$ πάντα ισχύει $\beta_1\neq\beta_2$ αφού $\beta_1=1$ ενώ $\beta_2=-6$

ή δεν επιτυγχάνεται ποτέ το $D=D_x=D_y=0$ αφού ακόμα και για $\lambda=3$ έχω $D=0$ ενώ $D_x=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}=1+6=7\neq 0$.

Ασκηση 3



$\Pi = 24\ cm$

Εστω $y = \text{μηκος} = (AB) = (\Delta\Gamma)$

και $x = \text{πλατος} = (A\Delta) = (B\Gamma)$

Ισχυει $2x+2y=24 \Leftrightarrow x+y=12$ (1)

Επισης ισχυει: $E_{αρχ} = x \cdot y$ $\Big\| \Leftrightarrow \dfrac{E_{αρχ}}{E_{τελ}} = \dfrac{xy}{(x-2)(y+3)} \xrightarrow{E_{τελ}=2E_{αρχ}} \dfrac{1}{2} = \dfrac{xy}{(x-2)(y+3)}$

$E_{τελ} = (y+3)(x-2)$

$\Leftrightarrow xy+3x-2y-6 = 2xy \Leftrightarrow 3x-2y-6-xy=0$ (2)

(β) Λυνουμε το συστημα των (1) και (2)

$$\begin{cases} y = 12-x & (1) \\ 3x-2y-6-xy=0 \Leftrightarrow 3x-2(12-x)-6-x(12-x)=0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$3x-24+2x-6-12x+x^2=0 \Leftrightarrow x^2-7x-30=0 \quad (S=7,\ P=-30)$

$\Leftrightarrow \boxed{x=10}$ ή $x=-3$ απορ.
Ειναι αρνητικο

Τοτε (1): $\boxed{y=2}$

Ασκηση 4

(α) $2x+2y=40 \Leftrightarrow x+y=20.$

- αν $x_1=10$ τοτε $y_1=10$ και εμβαδο $E_1 = x_1y_1 = 100$ τμ.
- αν $x_2=5$ τοτε $y_2=15$ και $E_2 = x_2y_2 = 75$ τμ.
- αν $x_3=1$ τοτε $y_3=19$ και $E_3 = x_3y_3 = 19$ τμ.

Παρατηρουμε οτι εχουν διαφορετικα εμβαδα

(β) πλατος $= x$, μηκος $= y$

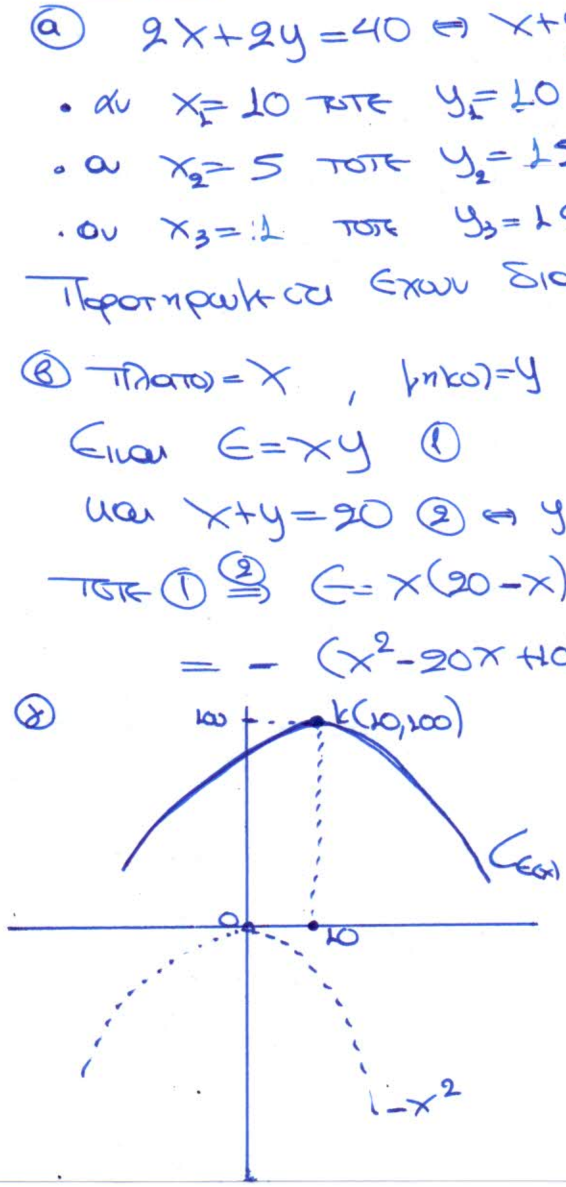
Ειναι $E = xy$ (1)

και $x+y=20$ (2) $\Leftrightarrow y = 20-x$ (2)

Τοτε (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} E = x(20-x) = -x^2+20x = -x^2+20x-100+100$

$= -(x^2-20x+100)+100 = -(x-10)^2+100$

(γ)



η $E(x)$ ειναι η οριζοντια μετατοπιση της $-x^2$ κατα 10 μοναδες οριζοντια προς δεξια και 100 μοναδες κατακορυφα προς τα επανω.

Η συναρτηση $E(x)$ παρουσιαζει <u>max</u> για $x=10$ με τιμη $E_{max} = 100$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$f(x)=\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}$

α) πρέπει $8-x\geq 0$ και $8+x\geq 0$ Άρα $A_f=[-8,8]$
$x\leq 8$ $\quad$ $x\geq -8$

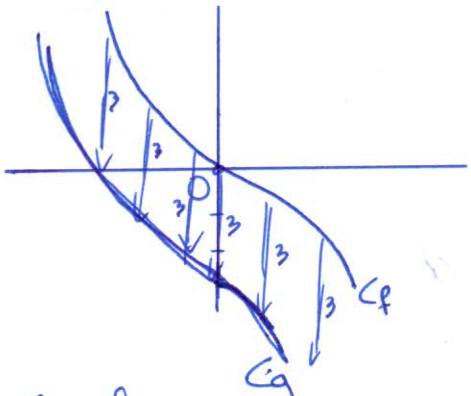
β) $\forall x\in[-8,8]$

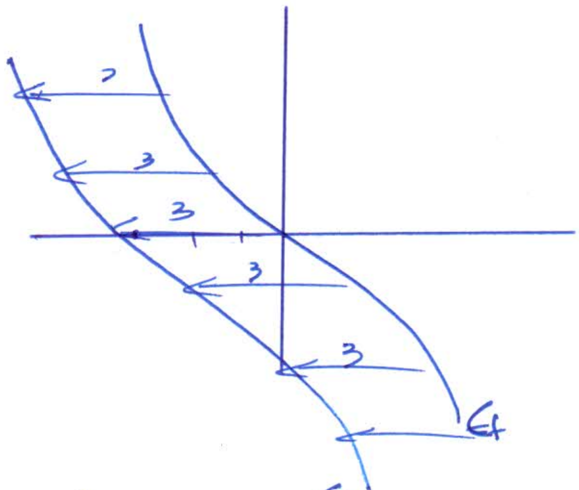
$f(-x)=\sqrt{8-(-x)}-\sqrt{8-x}=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}=-\left(\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}\right)=-f(x),\ \forall x\in A_f.$

άρα f περιττή συνάρτηση.

γ). Αφού f είναι ↓ στο A_f θέλουμε η C_f της να κατέρχεται και αφού f είναι περιττή θέλουμε η C_f της να είναι συμμετρική ως προς την αρχή $O(0,0)$, τα δύο παραπάνω ισχύουν στο σχήμα (iii).

δ) Γεωμετρικά





$g(x)=f(x)-3$, κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, άρα δεν είναι πλέον συμμετρική ως προς την αρχή $O(0,0)$

$h(x)=f(x+3)$, οριζόντια μετατόπιση της f κατά 3 μονάδες αριστερά άρα η C_h δεν είναι πλέον συμμετρική ως προς $O(0,0)$.

Αλγεβρικά

Δεν ισχύει $h(-x)=-h(x)\quad \forall x\in[-8,8]$

ούτε $g(-x)=-g(x)\quad \forall x\in[-8,8]$

Στην περίπτωση δε της $h(x)=f(x+3)$ το ΠΟ της πλέον είναι το $[-11,5]$ που δεν είναι συμμετρικό σύνολο, $h(x)=\sqrt{8-(x+3)}-\sqrt{8+x+3}=\sqrt{5-x}+\sqrt{x+11}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

$f(x)=ax^2+\beta x+\gamma\quad,\quad g(x)=-x+2$

Από σχήμα προκύπτει ότι. $\Gamma(0,-2)$, $A(2,0)$, $B(-2,0)\in C_f$ άρα ισχύουν:

$$\begin{matrix} f(0)=-2 \\ f(2)=0 \\ f(-2)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a0^2+\beta\cdot 0+\gamma=-2 \\ 4a+2\beta+\gamma=0 \\ 4a-2\beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\gamma=-2} \\ 2a+\beta-1=0 \\ 2a-\beta-1=0 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 4a-2=0 \Leftrightarrow \boxed{a=1/2}$$

και $\boxed{\beta=0}$

Άρα $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$.

(β) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$

C_f τέμνει C_g $\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-2=-x+2 \Leftrightarrow$

$x^2-4=-2x+4 \Leftrightarrow$

$x^2+2x-8=0$

$S=-2$ | $x=-4$

$P=-8$ | $x=2$

Άρα $A(2,g(2))=(2,0)$ και $\Delta=(-4,g(-4))=(-4,6)$

(γ) η νέα $f'(x)=f(x)+4,5=f(x)+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2-2+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$

Τότε η εξίσωση $f'(x)=g(x)$ έχει μοναδική λύση. Πράγματι:

$\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}=-x+2 \Leftrightarrow x^2+5=-2x+4 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x=-1$. και το μοναδικό κοινό σημείο θα ήταν το

$K(-1,g(-1))=(-1,3)$.

Άσκηση 7

(α) $(2\sigma\upsilon\nu x+1)(5\sigma\upsilon\nu x-4)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x+1=0$ ή $5\sigma\upsilon\nu x-4=0$

$\sigma\upsilon\nu x=-1/2$ απορ. διότι $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ και πρέπει $\sigma\upsilon\nu x>0$

$\boxed{\sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}}$

(β) Ισχύει $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2x+\frac{16}{25}=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2x=\frac{9}{25} \Leftrightarrow |\eta\mu x|=\frac{3}{5}$

όμως $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ άρα $\eta\mu x>0$ επομένως $\boxed{\eta\mu x=\frac{3}{5}}$

Τότε $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$ και $\sigma\varphi x=\frac{1}{\varepsilon\varphi x}=\frac{4}{3}$.

Άσκηση 8

$f(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in\mathbb{R}$

(α) $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ sec

$\max f=|\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$, $\min f=-|\frac{1}{2}|=-\frac{1}{2}$

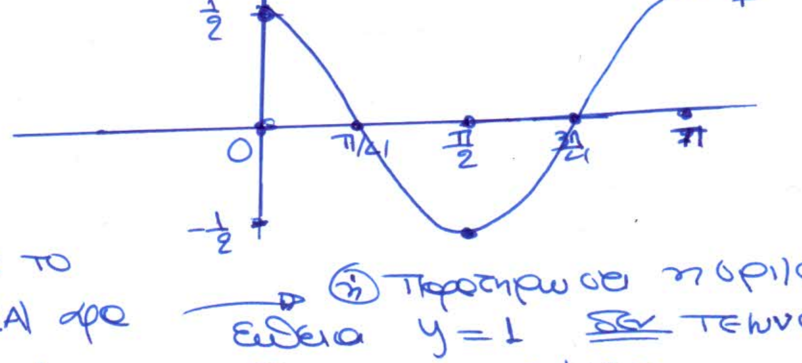
$-1\le \sigma\upsilon\nu 2x\le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\le\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{2}$

(β) Πίνακας τιμών

	$\frac{0}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	−1	0	1
$f(x)$	1/2	0	−1/2	0	1/2



(γ) Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ και $1\notin f(A)$ άρα δεν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=1$

(ή) Παρατηρούμε ότι η οριζόντια ευθεία $y=1$ δεν τέμνει την C_f σε κανένα σημείο.