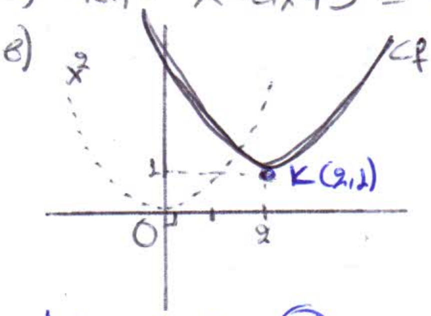
ΛΥΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΓΑΣΙΑ Νο 2

Ασκηση 1

α) $f(x)=x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$, $x\in\mathbb{R}$

β)



• C_f είναι η μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 2 μονάδες οριζόντια προς δεξιά και 1 κατακόρυφα προς τα επάνω, δηλ. η C_f έχει κορυφή το $K(2,1)$

Ασκηση 2 (Α)

(α) $f(x)=x^2-5$

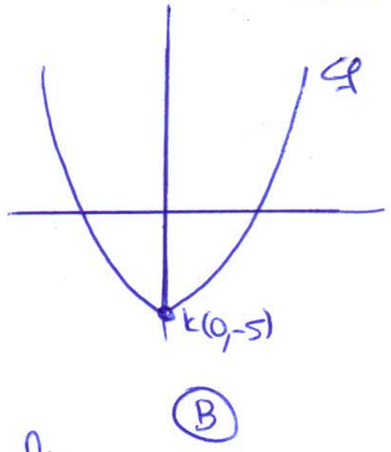
Ισχύει $x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2-5\geq -5 \Leftrightarrow f(x)\geq -5 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$, άρα η f παρουσιάζει Ο.Ε. στο $x_0=0$

(β) $\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$ και

Επιπλέον: $f(-x)=(-x)^2-5=x^2-5=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα η f άρτια στο $\mathbb{R}$.

(γ) Προκύπτει με την κατακόρυφη μετατόπιση της C_g της $g(x)=x^2$ κατά 5 μονάδες προς τα κάτω.

Σχόλιο Τα (α),(β) μπορούν να απαντηθούν από την C_f της $f(x)=x^2-5$



(α) Η f παρουσιάζει min στην κορυφή της $K(0,-5)$ άρα για $x_0=0$ έχει min με τιμή $f(0)=-5$

(β) Η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ άρα η f είναι άρτια στο συμμετρικό πεδίο ορισμού της το $\mathbb{R}$.

(Β)

$f(x)=ax+\beta$

(α) $A(1,2)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=2 \Leftrightarrow a+\beta=2$ (1)

$B(5,8)\in C_f \Leftrightarrow f(5)=8 \Leftrightarrow 5a+\beta=8$ (2)

και λύνω το σύστημα των (1),(2):

$$\begin{cases} a+\beta=2 \\ 5a+\beta=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-\beta=-2 \\ 5a+\beta=8 \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 4a=6 \Leftrightarrow a=\frac{6}{4} \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{3}{2}}$$

Τότε από (1) $\beta=2-a=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\beta=\frac{1}{2}}$

Άρα $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

(β) $g(x)=f(x+1)-3=\frac{3}{2}(x+1)+\frac{1}{2}-3=\frac{3}{2}(x+1)-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow g(x)=\frac{3}{2}x-1$

(γ) $h(x)=f(x-k)-\frac{k}{2}\overset{k>0}{=}\frac{3}{2}(x-k)-\frac{k}{2}=\frac{3}{2}x-\frac{3k}{2}-\frac{k}{2}=\frac{3}{2}x-2k$ (3)

όμως από δεδομένα $h(x)=\frac{3}{2}(x-1)=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ (4)

Από (3),(4) προκύπτει η εξίσωση: $-2k=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow \boxed{k=\frac{3}{4}}$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

(α) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-x \ (1) \\ x^2+y^2=1 \ (2) \end{cases}$

(2) $\overset{(1)}{\Rightarrow} x^2+(-1-x)^2=1 \Leftrightarrow x^2+(1+x)^2=1 \Leftrightarrow x^2+1+2x+x^2=1 \Leftrightarrow$

$2x^2+2x=0 \Leftrightarrow 2x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$

- αν $x=0$ η (1): $y=-1$ άρα $(x_1,y_1)=(0,-1)$
- αν $x=-1$ η (1): $y=0$ άρα $(x_2,y_2)=(-1,0)$.

(β)

$συνω+ημω=-1$

$ημ^2ω+συν^2ω=1$

Θέτω $συνω=x$ και $ημω=y$ τότε το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

$\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ που από (α) ερώτημα έχει λύσεις $(0,-1)$ ή $(-1,0)$

Άρα

$ημω=-1$ και $συνω=0$ ή $ημω=0$ και $συνω=-1$

άρα $ω=\frac{3π}{2}$ $(0\le ω\le 2π)$ άρα $ω=π$ $(0\le ω\le 2π)$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$f(x)=\sqrt{\frac{x^3-1}{9-x^2}}+\frac{2}{x^3+7x-8}$

Πρέπει $\frac{x^3-1}{9-x^2}\ge 0$ και $9-x^2\ne 0$ και $x^3+7x-8\ne 0$

$(x^3-1)(9-x^2)\ge 0$ ↓ πινακάκι

$x^2\ne 9$

$x\ne \pm 3$

1	0	7	−8	1
	1	1	8	
1	1	8	0	

$(x-1)(x^2+x+8)\ne 0$

$x-1\ne 0$ και $x^2+x+8\ne 0$

$x\ne 1$ αληθές $\forall x\in\mathbb{R}$ αφού $Δ<0$

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
x^3-1	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	
$9-x^2$	$-$ 0	$+$	$+$ 0	$-$	
Γινόμενο	$+$	$-$	$+$	$-$	

Άρα $A_f=(-\infty,-3)\cup(1,3)$

Σχόλιο

Προσοχή υπόριζη ποσότητα είναι αυτό το $\frac{x^3-1}{9-x^2}$ άρα πρέπει $\frac{x^3-1}{9-x^2}\geq 0$

(ii) $g(x)=\sqrt{8-x^3}+\sqrt[3]{x^2-5x+6}$

Πρέπει $8-x^3\geq 0$ και $x^2-5x+6\geq 0$

$\boxed{\begin{array}{l} 8-x^3=0 \\ x^3=8 \\ x=2 \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} x^2-5x+6=0 \\ \Delta=1 \\ x_{1,2}=2,3 \end{array}}$

	$-\infty$	2	$+\infty$
$8-x^3$	$+$ 0	$-$	

$x\leq 2$

		2	3	
x^2-5x+6	$+$ 0	$-$ 0	$+$	

$x\leq 2$ ή $x\geq 3$

Συναλήθευση:

$A_g=(-\infty,2]$

(8) (i) x^3+8x-9

1	0	8	-9	$\rho=1$
	1	1	9	
1	1	9	0	

$(x-1)(x^2+x+9)$

Πινακάκι

		1	
$x-1$	$-$ 0	$+$	
x^2+x+9	$+$	$+$	
Γινόμενο	$-$	$+$	

άρα:

$x^3+8x-9>0$ αν $x>1$

$x^3+8x-9<0$ αν $x<1$

(ii) x^3+1

	$-\infty$	-1	$+\infty$
x^3+1	$-$ 0	$+$	

άρα

$x^3+1>0$ αν $x>-1$

$x^3+1<0$ αν $x<-1$

(iii) x^2+5x+4

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
x^2+5x+4	$-$ 0	$+$ 0	$-$	

άρα

$x^2+5x+4>0$ αν $-4<x<-1$

$x^2+5x+4<0$ αν $x<-4$ ή $x>-1$

(iv) $(x^2-3x+2)(2-x)(x^3+27)=A$

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
x^2-3x+2	$+$	$+$ 0	$-$ 0	$+$	
$2-x$	$+$	$+$	$+$ 0	$-$	
x^3+27	$-$ 0	$+$	$+$	$+$	
A	$-$	$+$	$-$	$+$	

$A>0$ αν $-3<x<1$

$A<0$ αν $x<-3$ ή $1<x<2$ ή $x>2$