1) ΑΣΚΗΣΗ

ΛΥΣΕΙΣ

α) Έστω x η ηλικία του πατέρα, y η ηλικία της μητέρας και z η ηλικία του παιδιού

Τότε:

«Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από του παιδιού» $\Leftrightarrow y=3z$ (1)

«ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς του παιδιού είναι $\frac{11}{3}$» $\Leftrightarrow \frac{x}{z}=\frac{11}{3}$ (2)

«το άθροισμα των ηλικιών και των τριών είναι 115» $\Leftrightarrow x+y+z=115$ (3)

β) Άρα για να προσδιορίσουμε την ηλικία του καθενός, αρκεί να λύσουμε το 3x3 σύστημα που δημιουργούν οι σχέσεις (1),(2),(3)

Άρα

$$\begin{cases} y=3z & (1) \\ 3x=11z \Leftrightarrow x=\frac{11z}{3} & (2) \\ x+y+z=115 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \overset{(2)}{\underset{(1)}{\Leftrightarrow}} \frac{11z}{3}+3z+z=115 \Leftrightarrow 23z=345 \Leftrightarrow z=\frac{345}{23} \Leftrightarrow \boxed{z=15.}$$

Τότε (1) $y=45$ και (2) $x=55$

2) ΑΣΚΗΣΗ

α) Αρκεί να κάνω διερεύνηση του παραμετρικού γραμμικού 2x2 συστήματος:

$$\begin{cases} x+(\lambda+2)y=3 \\ (\lambda-2)x+5y=3 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda+2 \\ \lambda-2 & 5 \end{vmatrix}=5-(\lambda-2)(\lambda+2)=5-(\lambda^2-4)=9-\lambda^2$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 3 & \lambda+2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=15-3(\lambda+2)=15-3\lambda-6=9-3\lambda$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \lambda-2 & 3 \end{vmatrix}=3-3(\lambda-2)=3-3\lambda+6=9-3\lambda$$

ΛΥΣΕΙΣ

i) αν $D\neq 0 \Leftrightarrow 9-\lambda^2\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\pm3$

τότε το Σ έχει μοναδική λύση $x_0=\frac{D_x}{D}=\frac{9-3\lambda}{9-\lambda^2}=\frac{3(\cancel{3-\lambda})}{(\cancel{3-\lambda})(3+\lambda)}=\frac{3}{3+\lambda}$

και $y_0=\frac{D_y}{D}=\frac{9-3\lambda}{9-\lambda^2}=\frac{3}{3+\lambda}$

άρα $(x_0,y_0)=\left(\frac{3}{3+\lambda},\frac{3}{3+\lambda}\right)$

ii) αν $D=0 \Leftrightarrow \lambda=3$ ή $\lambda=-3$

• αν $\lambda=3$ τότε το Σ: $\begin{cases} x+5y=3 \\ x+5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow x+5y=3 \Leftrightarrow x=3-5y,\ y\in\mathbb{R},$

τότε το Σ είναι αόριστο

• αν $\lambda=-3$ τότε το Σ: $\begin{cases} x-y=3 \\ -5x+5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x-y=-\frac{3}{5} \end{cases}$, αδύνατο

Άρα

• αν $\lambda\neq\pm3$ τότε οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που συνθέτουν το σύστημα θα τέμνονται σε μοναδικό σημείο.

• αν $\lambda=3$ τότε οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ ταυτίζονται

• αν $\lambda=-3$ τότε οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

(β) Σύμφωνα με το α) i) η μοναδική λύση είναι η $(x_0,y_0)=\left(\frac{3}{3+\lambda},\frac{3}{3+\lambda}\right),\ \lambda\neq\pm3$

(γ). Θέτω στην ευθεία $x+2y=3$ όπου $x=\frac{3}{3+\lambda},\ y=\frac{3}{3+\lambda}$

γίνεται: $\frac{3}{3+\lambda}+2\frac{3}{3+\lambda}=3 \Leftrightarrow 3+6=3(3+\lambda)$

$\Leftrightarrow 9=9+3\lambda \Leftrightarrow 0=3\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda=0}$

ΛΥΣΕΙΣ

3) Ασκηση

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x^3+1)(x^2-2x-3)}{9-x^2}}$$

Πρεπει $9-x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 9 \Leftrightarrow x\neq\pm 3$ και $\frac{(x^3+1)(x^2-2x-3)}{9-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow$

$(x^3+1)(x^2-2x-3)(9-x^2)\geq 0$

$x^3+1=0$
$x^3=-1 \Leftrightarrow$
$x=-1$

$x^2-2x-3=0$
$\Delta=16$
$x_{1,2}=-1,3$

x	$-\infty$ … -3	-3 … -1	-1 … 3	3 … $+\infty$
x^3+1	$-$	$-$ (0 στο -1)	$+$	$+$
x^2-2x-3	$+$	$+$ (0 στο -1)	$-$ (0 στο 3)	$+$
$9-x^2$	$-$ (0 στο -3)	$+$	$+$ (0 στο 3)	$-$
Γινόμενο	$+$	$-$	$-$	$-$

$$A_f=(-\infty,-3)\cup\{-1\}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{4-x^2}$$

Πρεπει: $4-x^2\neq 0$, $x^2\neq 4$, $x\neq\pm 2$ και $x^2-1\geq 0$

$\boxed{x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$A_g=(-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$$

$$h(x)=\sqrt[3]{-2x^2-6x}+\frac{x+7}{x^3-27}$$

Πρεπει $-2x^2-6x\geq 0$ και $x^3-27\neq 0$, $x^3\neq 27$, $x\neq\sqrt[3]{27}$, $x\neq 3$

$\boxed{-2x^2-6x=0,\ -2x(x+3)=0,\ x=0 \text{ ή } x=-3}$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$-2x^2-6x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$A_h=[-3,0]$$