

Πρότυπο

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 3x - 3y + 2 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \\ (\lambda + 1)x + (3 - \lambda)y + \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R} \quad (2)$$

A). Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει 2 παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: x + y - 2 = 0$, $\varepsilon_2: x + y - 1 = 0$.

B). Αν $M(\alpha, \beta)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$(\alpha + \beta - 2)^2 + (\alpha + \beta - 1)^2 = 2 |(\alpha + \beta) - 2| \cdot |(\alpha + \beta) - 1|$$

να αποδείξετε ότι το M ανήκει στην μεσοπαράλληλη ευθεία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Γ). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι όλες αυτές οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο $A(-3/4, 1/4)$, για όλες τις τιμές του λ .

Δ). Υπάρχει ευθεία της εξίσωσης (2) που να τέμνει τον άξονα x' στο σημείο B , τον άξονα y' στο σημείο Γ , ώστε να ισχύει:

$$1/OB^2 + 1/O\Gamma^2 = 1 \quad ;$$

Δίνεται O η αρχή των αξόνων. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ε). Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AEK , όπου A το σημείο του ερωτήματος Γ , K τυχαίο σημείο της ευθείας ε_1 του ερωτήματος A) και $E(0, -1/2)$.