Α' ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ⓐ ΔΙΑΤΑΞΗ

Α1 Αποδεικτικές ασκήσεις που δεν δίνονται δεδομένα.

① Να αποδείξετε ότι:

i) $25\alpha^2 \geq -1-10\alpha$

Λύση

Έστω ότι: $25\alpha^2 \geq -1-10\alpha \Leftrightarrow$

$25\alpha^2+1+10\alpha \geq 0$

$(5\alpha+1)^2 \geq$ αληθές

ii) $(4\alpha+\beta)^2 \geq 16\alpha\beta$

Λύση

Έστω ότι: $(4\alpha+\beta)^2 \geq 16\alpha\beta \Leftrightarrow$

$(4\alpha)^2+2\cdot 4\alpha\cdot\beta+\beta^2 \geq 16\alpha\beta \Leftrightarrow$

$16\alpha^2+8\alpha\beta+\beta^2-16\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$

$16\alpha^2-8\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(4\alpha-\beta)^2 \geq 0$, αληθές

iii) $(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2 \geq 4(\alpha\beta+\gamma\delta)$

Λύση

Έστω ότι: $(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2 \geq 4(\alpha\beta+\gamma\delta) \Leftrightarrow$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2+2\gamma\delta+\delta^2 \geq 4\alpha\beta+4\gamma\delta \Leftrightarrow$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2+2\gamma\delta+\delta^2-4\alpha\beta-4\gamma\delta \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2\alpha\beta-2\gamma\delta \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-2\gamma\delta+\delta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2 \geq 0$ αληθές.

iv) $\alpha^4+\beta^4 \geq 2\alpha^2\beta^2$

Λύση

Έστω ότι: $\alpha^4+\beta^4 \geq 2\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha^2)^2-2\alpha^2\beta^2+(\beta^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha^2-\beta^2)^2 \geq 0$, αληθές

v) $3\alpha(3\alpha-4\beta)+1 \geq 8\beta-20\beta^2$

Λύση

Έστω ότι: $3\alpha(3\alpha-4\beta)+1 \geq 8\beta-20\beta^2 \Leftrightarrow$

$9\alpha^2-12\alpha\beta+1-8\beta+20\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$9\alpha^2-12\alpha\beta+1-8\beta+16\beta^2+4\beta^2 \geq 0$

$9\alpha^2-12\alpha\beta+4\beta^2+1-8\beta+16\beta^2 \geq 0$

$(3\alpha-2\beta)^2+(1-4\beta)^2 \geq 0$, αληθές

vi) $\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1 \geq 2\alpha\beta^2+2\alpha$

Λύση

Έστω ότι: $\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1-2\alpha\beta^2-2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2(\beta^2+1)+\beta^2+1-2\alpha(\beta^2+1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\beta^2+1)(\alpha^2+1-2\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\beta^2+1)(\alpha-1)^2 \geq 0$, αληθές

vii) $9\alpha^2+16\beta^2+\gamma^2+3 \geq 2(3\alpha-4\beta+\gamma)$

Λύση

Έστω ότι: $9\alpha^2+16\beta^2+\gamma^2+3 \geq 2(3\alpha-4\beta+\gamma) \Leftrightarrow$

$9\alpha^2+16\beta^2+\gamma^2+1+1+1 \geq 6\alpha-8\beta+2\gamma \Leftrightarrow$

$9\alpha^2-6\alpha+1+16\beta^2+8\beta+1+\gamma^2-2\gamma+1 \geq 0$

$(3\alpha-1)^2+(4\beta+1)^2+(\gamma-1)^2 \geq 0$, αληθές

viii) $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta \geq 0$

Λύση

Έστω ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \geq 0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

$2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+(\alpha+\beta)^2+\beta^2 \geq 0$, αληθές.

ΠΡΟΣΟΧΗ Σε όλα τα παραπάνω μπορεί να δοθεί και το επιπλέον ερώτημα του "Πότε ισχύει η ισότητα"

Τότε

i) Έχουμε δείξει ότι

$$(5\alpha+1)^2 \geq 0$$

άρα η ισότητα ισχύει:

$$(5\alpha+1)^2=0 \Leftrightarrow 5\alpha+1=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{5}$$

ii) Έχουμε δείξει ότι

$$(4\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

άρα η ισότητα ισχύει.

$$(4\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \beta=4\alpha$$

iii) Έχουμε δείξει ότι

$$(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2 \geq 0$$

η ισότητα ισχύει.

$$(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2=0 \Leftrightarrow$$

$\alpha-\beta=0$ και $\gamma-\delta=0$

$\alpha=\beta$ $\quad$ $\gamma=\delta$

iv) Έχουμε δείξει ότι

$$(\alpha^2-\beta^2)^2 \geq 0$$

άρα η ισότητα ισχύει:

$$(\alpha^2-\beta^2)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=0$$

$\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$

v) Έχουμε δείξει ότι:

$$(3\alpha-2\beta)^2+(1-4\beta)^2 \geq 0$$

άρα η ισότητα ισχύει.

$$(3\alpha-2\beta)^2+(1-4\beta)^2=0 \Leftrightarrow$$

$3\alpha-2\beta=0$ και $1-4\beta=0$

$3\alpha=2\beta \Leftrightarrow$ $\quad$ $-4\beta=-1$

$\alpha=\frac{2}{3}\beta \Leftrightarrow$ $\quad$ $\beta=\frac{1}{4}$

$\alpha=\frac{2}{12} \Leftrightarrow$

$\alpha=\frac{1}{6}.$

vi) Έχουμε δείξει ότι:

$$(\beta^2+1)(\alpha-1)^2 \geq 0$$

η ισότητα ισχύει:

$$(\beta^2+1)(\alpha-1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$\beta^2+1=0$ ή $(\alpha-1)^2=0$

$\beta^2=-1.$ $\quad$ $\alpha=1$

αδύνατο

διότι $\forall \beta \in \mathbb{R}$

$\beta^2 \geq 0.$

vii) Έχουμε δείξει ότι:

$$(3\alpha-1)^2+(4\beta+1)^2+(\gamma-1)^2 \geq 0$$

άρα η ισότητα ισχύει:

$$(3\alpha-1)^2+(4\beta+1)^2+(\gamma-1)^2=0$$

$3\alpha-1=0$ και $4\beta+1=0$ και $\gamma-1=0$

$\alpha=\frac{1}{3}$ $\quad$ $\beta=-\frac{1}{4}$ $\quad$ $\gamma=1$

viii) Έχουμε δείξει ότι:

$$\alpha^2+(\alpha+\beta)^2+\beta^2 \geq 0$$

η ισότητα ισχύει:

$$\alpha^2+(\alpha+\beta)^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow$$

$\alpha=0$ και $\alpha+\beta=0$ και $\beta=0$

$\alpha=-\beta$

άρα $\alpha=0$ και $\beta=0$

A2 Αποδεικτικές ανισώσεις με δεδομένα:

② Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\alpha, \beta > 0$ ν.α.ο. $\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta)$

<u>Λύση</u> Έστω ότι $\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta) \Leftrightarrow$

$$\alpha^3+\beta^3 - \alpha\beta(\alpha+\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) - \alpha\beta(\alpha+\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)\left[\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-\alpha\beta\right] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ αληθές διότι:

από δεδομένα: $\alpha>0$ και $\beta>0$, άρα $\alpha+\beta>0$
και $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ ως τέλειο τετράγωνο.

ii) Αν $\beta > 1 > \alpha$, ν.α.ο. $\alpha+\beta > 1+\alpha\beta$

<u>Λύση</u>

Έστω: $\alpha+\beta > 1+\alpha\beta \Leftrightarrow$

$$\alpha+\beta-1-\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(1-\beta) + \beta-1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(1-\beta) - (1-\beta) > 0 \Leftrightarrow$$

$(1-\beta)(\alpha-1) > 0$, αληθές

διότι από δεδομένα.

$1<\beta \Leftrightarrow 1-\beta<0$
και $\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha-1<0$

iii) Αν $|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$
τότε ν.α.ο. $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2$

<u>Λύση</u>
Από θεωρία γνωρίζουμε ότι
$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ και ότι η ισότητα, δηλαδή το $|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$
ισχύει όταν α,β ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από τους α,β να ισούται με μηδέν.
<u>Εδώ</u> έχουμε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ άρα και $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$. Επομένως ισχύει ότι α,β ομόσημοι
και αφού α,β ομόσημοι ισχύει <u>$\alpha\cdot\beta>0$</u>.

<u>Άρα</u> Έστω ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2 \overset{\alpha\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha\beta\dfrac{\alpha}{\beta}+\alpha\beta\dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$
$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ <u>αληθές</u>

$\boxed{\Delta_3}$ ① Αν $1<x<3$ και $-4<y<-1$
Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

i) $2x-3y$ iii) $\dfrac{1}{y+5}$

ii) $2x^2-3y^2$

Λύση

i) $$\begin{matrix} 1<x<3 \\ -4<y<-1 \end{matrix} \begin{matrix} \cdot(2) \\ \cdot(-3) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<2x<6 \\ 12>-3y>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<2x<6 \\ 3<-3y<12 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 5<2x-3y<18.$$

ii) $$\begin{matrix} 1<x<3 \\ -4<y<-1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 1^2<x^2<3^2 \\ (-4)^2>y^2>(-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x^2<9 & \cdot(2) \\ 16>y^2>1 & \cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<2x^2<18 \\ -48<-3y^2<-3 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -46<2x^2-3y^2<15.$$

iii) $$-4<y<-1 \Rightarrow -4+5<y+5<5-1 \Leftrightarrow 1<y+5<4 \Leftrightarrow \frac{1}{1}>\frac{1}{y+5}>\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{y+5}<1$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Δεν αφαιρώ κατά μέλη ανισώσεις.
- Δεν διαιρώ κατά μέλη ανισώσεις
- Για να αντιστρέψω μια ανίσωση πρέπει τα άκρα της να είναι ομόσημα και αν είναι τα άκρα της ομόσημα τότε η φορά αλλάζει

  Πχ i) $2<x<3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{x}>\frac{1}{3}$ ii) $-3<y<-2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}>\frac{1}{y}>-\frac{1}{2}$
- Υψώνω στο τετράγωνο ανίσωση με θετικά άκρα η φορά δεν αλλάζει.

  Πχ $3<x<4 \Rightarrow 9<x^2<16$
- Υψώνω στο τετράγωνο ανίσωση με αρνητικά άκρα η φορά αλλάζει

  Πχ $-3<x<-2 \Leftrightarrow (-3)^2>x^2>(-2)^2 \Leftrightarrow 9>x^2>4 \Leftrightarrow 4<x^2<9$
- Όταν υψώνω ανίσωση στον κύβο η φορά δεν αλλάζει ποτέ ό,τι πρόσημο και να έχουν τα άκρα της ανίσωσης