ΕΡΓΑΣΙΑ Νο 9 ΑΛΓΕΒΡΑ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

$$\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda=0 \qquad \lambda\neq 0 \quad (1)$$

1) $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$

$\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda = \lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$

2) Είναι $\Delta=(\lambda^2-1)^2\geq 0$ για κάθε $\lambda\neq 0$

άρα η (1) έχει πραγματικές ρίζες $\forall \lambda\neq 0$

3) Για να έχει η (1) 2 ίσες ρίζες : $\Delta=0$ (1 διπλή ρίζα)

$\Delta=(\lambda^2-1)^2=0$

$\lambda^2-1=0$

$\lambda^2=1$

$\lambda=\pm 1$

4) $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda\leq 0 \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$

Πρέπει: $\lambda<0 \iff \boxed{\lambda<0}$

και $\Delta\leq 0 \iff (\lambda^2-1)^2\leq 0$ Το "<" είναι αδύνατο

$\boxed{\lambda=\pm 1}$

συνεπώς πρέπει $\lambda=-1$

5) Για $\lambda=-1$: έχουμε: $-x^2-2x-1\leq 0$

$-(x^2+2x+1)\leq 0$

$-(x+1)^2\leq 0$ που ισχύει για κάθε x

ΘΕΜΑ 2.

$$x^2-(\lambda^3+1)x-8=0 \quad (1) \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

1) $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = [-(\lambda^3+1)]^2-4\cdot1\cdot(-8) = (\lambda^3+1)^2+32 > 0 \quad \forall\, \lambda\in\mathbb{R}$

(ως άθροισμα μη αρνητικών)

άρα η (1) έχει πραγματικές κ' άνισες ρίζες $\forall\, \lambda\in\mathbb{R}$.

2) Αντίθετες ρίζες: $S=0$

$$\lambda^3+1=0$$

$$\lambda^3=-1$$

$$\lambda=-\sqrt[3]{1}$$

$$\boxed{\lambda=-1}$$

3) · Έχουμε: $x_1^2=x_2$ και $x_1\cdot x_2=-8$ $\Leftrightarrow$

$$x_1\cdot x_1^2=-8$$

$$x_1^3=-8$$

$$x_1=-\sqrt[3]{8}$$

$$\boxed{x_1=-2}$$

και $\boxed{x_2=x_1^2=(-2)^2=4}$

Τώρα, $S=x_1+x_2=-2+4=2$ κ' $S=\lambda^3+1$

$$\lambda^3+1=2$$

$$\lambda^3=1$$

$$\boxed{\lambda=1}$$

ΘΕΜΑ 3 $\quad f(x) = x^2 - 2x + |\lambda - 1|, \ \lambda \in \mathbb{R}$

1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + |\lambda - 1| = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4\cdot|\lambda - 1| = 4(1 - |\lambda - 1|)$

2) $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 - 2x + |\lambda - 1| > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha = 1 > 0$ πρέπει $\Delta < 0$

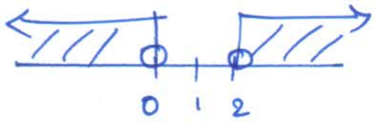
$$4(1 - |\lambda - 1|) < 0$$

$$1 - |\lambda - 1| < 0$$

$$|\lambda - 1| > 1$$

$$\lambda - 1 < -1 \quad \text{ή} \quad \lambda - 1 > 1$$

$$\lambda < 0 \quad \text{ή} \quad \lambda > 2$$



άρα $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

3) 1 διπλή ρίζα: $\Delta = 0$

$$4(1 - |\lambda - 1|) = 0$$

$$1 - |\lambda - 1| = 0$$

$$|\lambda - 1| = 1$$

$$\lambda - 1 = -1 \quad \text{ή} \quad \lambda - 1 = 1$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 2$$

4) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + |\lambda - 1|}$

Για να έχει η $g(x)$ Π.Ο όλο το $\mathbb{R}$ πρέπει $x^2 - 2x + |\lambda - 1| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

δηλ. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ από ② ερώτ. θα έχουμε:

$\lambda \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ (διότι θέλουμε $\Delta \leq 0$)

5) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+|\lambda-1|}}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

Για να έχει η $h(x)$ Π.Ο. όλο το $\mathbb{R}$ πρέπει:

$x^2-2x+|\lambda-1| > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ δηλ. $f(x) > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

από ② ερωτ. έχουμε: $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

6) Για $\lambda = 1$ η $f(x)$ γίνεται:

$f(x) = x^2 - 2x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 0$

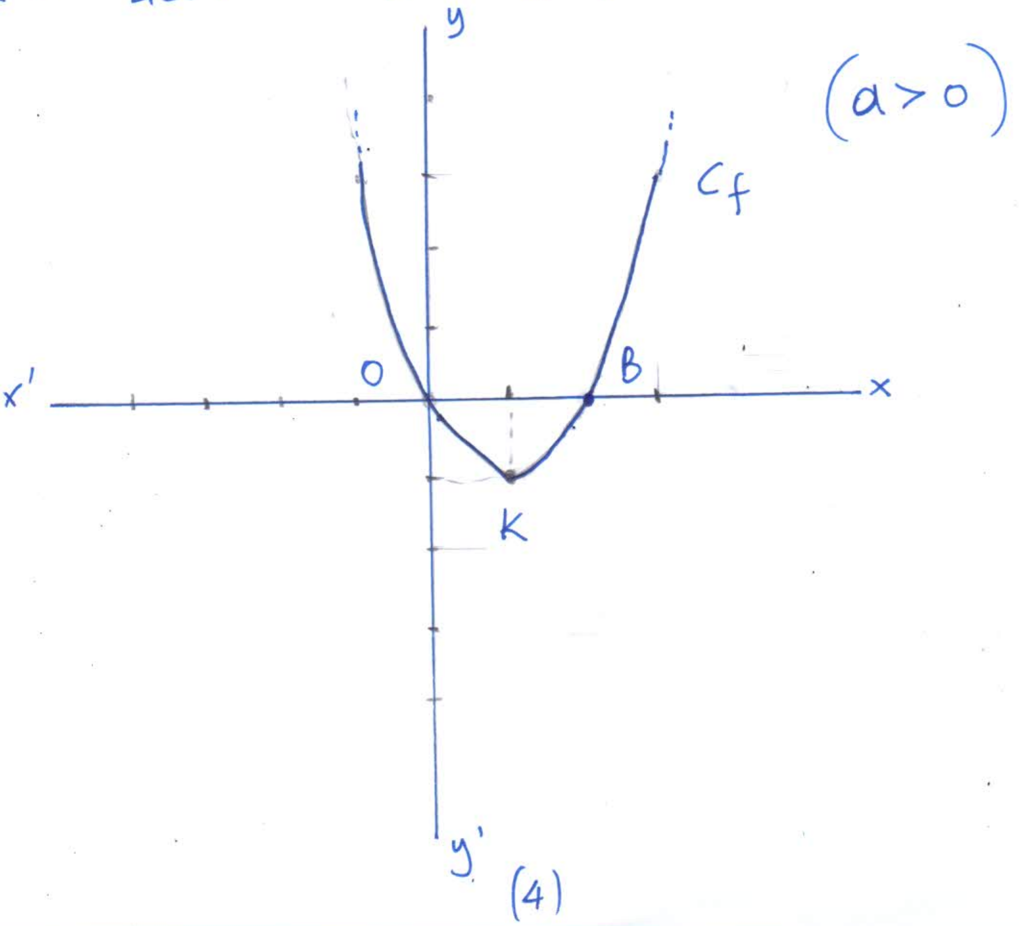
$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0$ ή $x = 2$

Δηλ, η C_f είναι παραβολή που τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ ή $O(0,0)$, $B(2,0)$ και τον άξονα yy' στο σημείο με $f(0) = 0$ δηλ το $O(0,0)$. Τέλος κορυφή της παραβολής είναι το σημείο

$K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right) = \left(\dfrac{2}{2}, \dfrac{-4}{4}\right) = (1, -1)$



ΘΕΜΑ 4

$$f(x) = \frac{\sqrt{3-|3-x|}}{x^2-1}$$

1) Για να ορίζεται η $f(x)$ πρέπει:

$3-|3-x| \geq 0$ και $x^2-1 \neq 0$

$|3-x| \leq 3$ και $x^2 \neq 1$

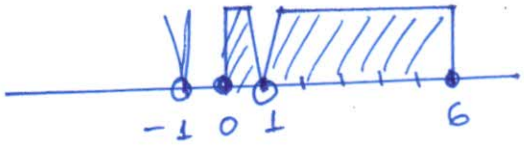
$x \neq \pm 1$

$-3 \leq 3-x \leq 3$

$-6 \leq -x \leq 0$

$6 \geq x \geq 0$

ή $0 \leq x \leq 6$



άρα $A_f = [0,1) \cup (1,6]$

2) Για να διέρχεται η C_f από το $O(0,0)$ πρέπει $f(0)=0$. Έχουμε: $f(0) = \frac{\sqrt{3-|3-0|}}{0^2-1} = \frac{0}{-1} = 0$ ισχύει

ΘΕΜΑ 5.

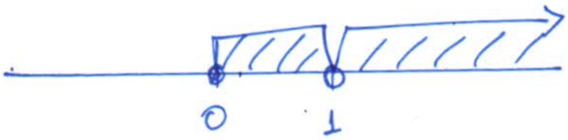
$$f(x) = \frac{\mu x - 14}{\sqrt{x}-1}$$

1) Π.Ο της $f(x)$ πρέπει:

$x \geq 0$ και $\sqrt{x}-1 \neq 0$

$\sqrt{x} \neq 1$

$x \neq 1$



$A_f = [0,1) \cup (1,+\infty)$

2) $A(16,6) \in C_f \Leftrightarrow f(16)=6$

$f(16) = \frac{\mu \cdot 16 - 14}{\sqrt{16}-1} = \frac{16\mu-14}{4-1} = \frac{16\mu-14}{3}$

$\frac{16\mu-14}{3} = 6$

$16\mu-14 = 18$

$16\mu = 32$

$\boxed{\mu = 2}$

3) Για $\mu=2$: $f(x)=\dfrac{2x-14}{\sqrt{x}-1}$ $\quad x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

(α) σημείο τομής C_f με άξονα $x'x$:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-14}{\sqrt{x}-1}=0 \Leftrightarrow 2x-14=0 \Leftrightarrow 2x=14 \Leftrightarrow x=7$

άρα $A(7,0)$

(β) σημείο τομής C_f με άξονα yy' : όπου $x=0$

$f(0)=\dfrac{2\cdot 0-14}{\sqrt{0}-1}=\dfrac{-14}{-1}=14$ άρα $B(0,14)$

(γ) Για το A_1 έχουμε :

$f(4)=\dfrac{2\cdot 4-14}{\sqrt{4}-1}=\dfrac{8-14}{2-1}=\dfrac{-6}{1}=-6$ άρα το $A_1(4,-6)\in C_f$

Για το B_1 έχουμε :

$f(9)=\dfrac{2\cdot 9-14}{\sqrt{9}-1}=\dfrac{18-14}{3-1}=\dfrac{4}{2}=2$ άρα το $B_1(9,\frac{5}{2})\notin C_f$.

ΘΕΜΑ 6

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$$

1) Π.Ο. της $f(x)$: πρέπει $x^2-6x+9\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\geq 0$ ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$

άρα $A_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^{\cancel{2}}}=|x-3|$

3) (α) $f(x)=5$

$|x-3|=5$

$x-3=-5$ ή $x-3=5$

$x=-2$ ή $x=8$

(β) $f(x)>5$

$|x-3|>5$

$x-3<-5$ ή $x-3>5$

$x<-2$ ή $x>8$

ΘΕΜΑ 7.

$$f(x) = x^2 + ax + a - 1 \qquad a \in \mathbb{R}$$

1) $f(0) = 0$

$a - 1 = 0$

$a = 1$

2) $f(x) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες $\Rightarrow \Delta \geq 0$

$x^2 + ax + a - 1 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = a^2 - 4(a-1) = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geq 0$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = 0$ έχει διπλή ρίζα $\Rightarrow \Delta = 0$

$(a-2)^2 = 0$

$a - 2 = 0$

$\boxed{a = 2}$

ΘΕΜΑ 8.

$$f(x) = \frac{\sqrt{|3x+1| - 1}}{x+1}$$

1) Π.Ο. της $f(x)$: πρέπει

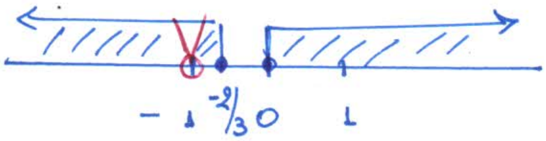
$|3x+1| - 1 \geq 0$ και $x + 1 \neq 0$

$|3x+1| \geq 1$ $\qquad$ $x \neq -1$

$3x + 1 \leq -1$ ή $3x + 1 \geq 1$

$3x \leq -2$ ή $3x \geq 0$

$x \leq -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $x \geq 0$



$$A_f = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right] \cup [0, +\infty)$$