

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΣΧΑΛΙΝΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

1. Δίνονται οι παραστάσεις : $A = |2x - 6|$ και $B = |x - 5|$, $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Να λυθεί η εξίσωση : $A = 3B$.
- 2) Να λυθεί η ανίσωση : $B \leq 2$.
- 3) Να λυθεί η ανίσωση : $A > 10$.
- 4) Για $3 \leq x \leq 5$, να αποδείξετε ότι : $A + B = x - 1$.
- 5) Να λυθεί η εξίσωση : $B = \sqrt{15 - 3x}$.
- 6) Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{A-1}{2} + |3 - x| = \frac{3}{2}$.
- 7) Να λυθεί η εξίσωση : $A = 4x - 6$.

2. Αν $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ τότε:

- 1) Να αποδείξεις ότι $\alpha=5$.
- 2) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - a|x| - 6 = 0$.
- 3) Να λύσεις την ανίσωση : $2|x - a| - 3 \geq 7$.

3. Δίνεται $\alpha = -\sqrt{\sqrt{81}} + \frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}} + 8\sqrt{3} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ και η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2\sqrt[3]{a}}$

- 1) Να αποδείξετε ότι : $\alpha = 27$.
- 2) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- 3) Να ελέγξετε αν το σημείο $A(2, 2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f .
- 4) Να λυθεί η ανίσωση : $|x - f(2)| \leq 1$.

4. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

- 1) Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης.
- 2) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- 3) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4}$$

- 4) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να έχει 2 ρίζες ετερόσημες.

5. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - 2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$. (I)

- 1) Για ποιες τιμές του λ η (I) έχει 2 πραγματικές ρίζες.
- 2) Έστω x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (I).
 - α) να βρείτε και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο των ριζών.
 - β) να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ρίζες της είναι ομόσημες.
Ποιό το πρόσημο των δύο ομόσημων ριζών; Να αιτιολογήσετε.

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + (\lambda^2 - 2\lambda) = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 2) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $[-1, 5]$.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3\lambda x + (2\lambda^2 - 2\lambda) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) Να βρείτε τις τιμές του αριθμού λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.
- 2) Αν S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης, να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:
 - α) $P = 2S + 24$
 - β) $S^2 - 5P + 11 > 0$

8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{|x| - 2}$

- 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.
- 2) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x| - 1$ για κάθε $x \in A$.
- 3) Να λύσετε στο σύνολο A την εξίσωση $(f(x) - 2)^6 - 7(f(x) - 2)^3 - 8 = 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4x + 9$

- 1) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει πραγματικές ρίζες.
- 2) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 3) Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{f(x) - 5} \geq 1$