ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
9/02/2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει:

α. $ημ^2ω + συν^2ω = 1$. β. εφω = $\dfrac{ημω}{συνω}$ με συνω $\neq 0$ και σφω = $\dfrac{συνω}{ημω}$ με ημω $\neq 0$

Μονάδες: (4+1+1)

Θεωρία Σχ. Βιβλίου Σελ 60

Α2. α. Τι ονομάζουμε ρίζα ενός πολυωνύμου P(x) και τι αριθμητική τιμή ; **Μονάδες: 3**

Θεωρία Σελ 129

β. Πότε ένα πολυώνυμο λέγεται μηδενικό πολυώνυμο; Πότε ένα πολυώνυμο λέγεται πολυώνυμο μηδενικού βαθμού; **Μονάδες: 3**

Θεωρία Σελ 129

Α3. Να συμπληρωθούν τα κενά.

α. ημχ = ημθ $\Leftrightarrow$ χ = $2κπ+θ$ ή $x = 2κπ + π - θ$, $κ \in Z$

β. συνχ = συνθ $\Leftrightarrow$ χ = $2κ+θ$ ή $x = 2κπ - θ$, $κ \in Z$

γ. εφχ = εφθ $\Leftrightarrow$ χ = $κπ+θ$, $κ \in Z$ **Μονάδες: 3**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Σ α. Το π είναι λύση της εξίσωσης $συνx + 1 = ημ2x$.

Λ β. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x) = (x^2 - 1)^{2020} + 2021x + 2019$ είναι 2019.

Λ γ. Η εξίσωση $ημx = α$, όπου $|α| > 1$, έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Σ δ. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Σ ε. Για κάθε γωνία θ που ορίζονται η εφθ και η σφθ, ισχύει σφθ · εφθ $\neq 0$. **Μονάδες: 10**

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = α\,ημx+β$, όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί.

A. Αν η συνάρτηση f διέρχεται από τα σημεία Α $(\frac{\pi}{2}, 2)$ και Β $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ να αποδείξετε ότι α=1 και β=1. **Μονάδες: 6**

$f(\pi/2) = 2 \Leftrightarrow α\,ημ\frac{\pi}{2} + β = 2 \Leftrightarrow α+β=2$ (+)

$f(3\pi/2) = 0 \Leftrightarrow α\,ημ(\frac{3\pi}{2}) + β = 2 \Leftrightarrow -α+β=0$

$2β=2 \Leftrightarrow β=1$.

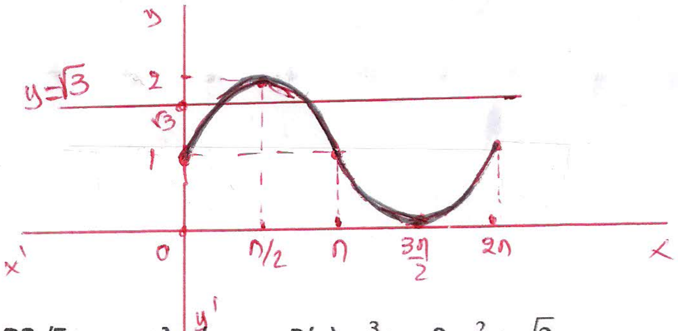
Άρα $α=1$ ↳ $f(x)=ημx+1$

B. Για α=1 και β=1

1. Να συμπληρώσετε τα κενά: Η συνάρτηση f(x)= ημx+1 έχει πεδίο ορισμού το ...R... , σύνολο τιμών το [0, 2] μέγιστη τιμή ...2..., και ελάχιστη τιμή ...0... **Μονάδες: 2**

2. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 2\pi]$ **Μονάδες: 4**

3. Η ευθεία $y=\sqrt{3}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας . **Μονάδες: 2**



x	0	π/2	π	3π/2	2π
ημx	0	1	0	−1	0
ημx+1	1	2	1	0	1

Η $y=\sqrt{3}$ τέμνει την C_f διότι $\sqrt{3} \in [0, 2]$

B2. Έστω πολυώνυμο $P(x)=x^3+ημθ\cdot x^2+\sqrt{3}συνφ\cdot x-1,\quad x,θ,φ\in R$.

1. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x=1 και $P(2)=7+\sqrt{3}$ να βρείτε τις τιμές των ημθ και συνφ. **Μονάδες: 7**

2. Να λύσετε τις εξισώσεις $ημθ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $συνφ=-\frac{1}{2}$. **Μονάδες: 4**

1. $P(1)=0 \Leftrightarrow 1+ημθ+\sqrt{3}συνφ-1=0 \Leftrightarrow ημθ+\sqrt{3}συνφ=0$ (−2)

$P(2)=7+\sqrt{3} \Leftrightarrow 8+4ημθ+2\sqrt{3}συνφ-1=7+\sqrt{3} \Leftrightarrow 4ημθ+2\sqrt{3}συνφ=\sqrt{3}$

$-2ημθ-2\sqrt{3}συνφ$ (+)

$4ημθ+2\sqrt{3}συνφ=\sqrt{3}$

$2ημθ=\sqrt{3} \Leftrightarrow ημθ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}συνφ=0 \Leftrightarrow συνφ=-1/2$

2. $ημθ=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$ημθ=ημ\pi/3$

$θ=2κ\pi+\pi/3,\ κ\in Z$

ή

$θ=2κ\pi+\pi-\pi/3$

$=2κ\pi+\frac{2\pi}{3},\ κ\in Z$

$συνφ=-1/2$

$συνφ=συν(\pi-\pi/3)$

$συνφ=συν\frac{2\pi}{3}$

$φ=2κ\pi+\frac{2\pi}{3}$

ή $κ\in Z$

$φ=2κ\pi-\frac{2\pi}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνονται πολυώνυμα: : $P(x) = (\kappa^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)x^3 + (\kappa - 1)x^2 - 3\kappa x + \lambda$ $\kappa, \lambda \epsilon \mathbb{R}$

και $Q(x) = x^3 + (2\mu + \nu)x^2 + (\mu - \nu)x - 2$ $\mu, \nu \epsilon \mathbb{R}$.

1) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ γνωρίζουμε ότι είναι 3^{ου} βαθμού και ότι $P(1) = -4$ να υπολογίσετε τις τιμές των $\kappa, \lambda \epsilon \mathbb{R}$ και να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ παίρνει τη μορφή :

$P(x) = x^3 - 3x - 2$. **Μονάδες: 6**

2) Αν ισχύει ότι $P(x) = Q(x)$ τότε να βρεθούν τα $\mu, \nu \epsilon \mathbb{R}$. **Μονάδες: 6**

3) Να αποδείξετε ότι το $x = 2$ είναι ρίζα του $P(x)$ και επίσης ότι το $x = 1$ είναι ρίζα του

$F(x) = 2020 \cdot P(x + 1) - (x^3 - 3x) \cdot P(4x - 2)$ **Μονάδες: 6**

Γ2. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι το $x = 1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου:

$\Phi(x) = (4\alpha^2 + \beta^2)x^4 - 4\beta(\alpha + 1)x^3 + \beta^2 x + 4$. **Μονάδες: 7**

Γ1. 1) 3^{ου} βαθμού: $\kappa^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$ ή $\kappa = -1$.

Για $\kappa = 1$ $P(x) = 0x^4 + x^3 - 3x + \lambda \Leftrightarrow P(x) = x^3 - 3x + \lambda$ δεκτό

Για $\kappa = -1$ $P(x) = 0x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 3x + \lambda \Leftrightarrow P(x) = -2x^2 + 3x + \lambda$. Απορ.

Αρα $\kappa = 1$: $P(x) = x^3 - 3x + \lambda$.

$P(1) = -4 \Leftrightarrow 1 - 3 + \lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2$

$P(x) = x^3 - 3x - 2$.

2) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^3 - 3x - 2 \\ Q(x) = x^3 + (2\mu + \nu)x^2 + (\mu - \nu)x - 2 \end{array}\right\}$ $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow$ $2\mu + \nu = 0$ και $\mu - \nu = -3$

(Σ) $\left.\begin{array}{l} 2\mu + \nu = 0 \\ \mu - \nu = -3 \end{array}\right\} (+)$

$3\mu = -3 \Leftrightarrow \mu = -1$ και $-2\mu + \nu = 0 \overset{\mu=-1}{\Leftrightarrow} \nu = 2$

3. $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 8 - 6 - 2 \Leftrightarrow P(2) = 0$ Αρα $x = 2$ ρίζα του $P(x)$

Για $x = 1$: $F(1) = 2020\, P(1+1) - (1 - 3) \cdot P(4 - 2)$

$F(1) = 2020 \cdot P(2) + 2P(2) = 2020 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$.

Αρα $F(1) = 0$ οπότε $x = 1$ ρίζα.

Γ2. $x = 1$ ρίζα $\Phi(x)$: $\Phi(1) = 0 \Leftrightarrow$

$4\alpha^2 + \beta^2 - 4\beta(\alpha + 1) + \beta^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$4\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta - 4\beta + \beta^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2) + (\beta^2 - 4\beta + 4) = 0 \Leftrightarrow (2\alpha - \beta)^2 + (\beta - 2)^2 = 0$

Αθροισμα μη αρνητικών Αριθμών: $2\alpha - \beta = 0$ και $\beta - 2 = 0$

Αρα $\underline{\beta = 2}$ και $\underline{\alpha = 1}$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση f(x)=ημx και η συνάρτηση $g(x) = (2συνω+1)\cdot ημx + 1$ με $x \in \mathbb{R}$ και $ω \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$.

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση f(x)= f(3x) **Μονάδες: 3**

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3f^2(x)-3f(x)+συν^2x=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $2ημ^2x - 3ημx + 1 = 0$ **Μονάδες: 4**

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση: $3f^2(x)-3f(x)+συν^2x=0$. **Μονάδες: 4**

Δ4. Αν η συνάρτηση $g(x) = (2συνω+1)\cdot ημx + 1$ έχει μέγιστη τιμή 3 να βρείτε την τιμή του συνω . **Μονάδες: 4**

Δ5. Για $συνω = \frac{1}{2}$ με $0 < ω < \frac{π}{2}$

Α. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω. **Μονάδες: 5**

Β. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = 4f(2π+x)\cdot f(π-x) + g^2(\frac{3π}{2}+x) + 4f(\frac{π}{2}+x)$ είναι ανεξάρτητη του x. **Μονάδες: 5**

Δ1. $f(x)=f(3x) \Leftrightarrow ημx = ημ3x \Leftrightarrow$

$x = 2κπ + 3x$ ή $x = 2κπ + π - 3x$

$-2x = 2κπ$ ή $4x = 2κπ + π$.

$x = -κπ,\ κ\in Z$ ή $x = \frac{κπ}{2} + \frac{π}{4},\ κ \in Z$

Δ2. $3f^2(x) - 3f(x) + συν^2x = 0 \Leftrightarrow 3ημ^2x - 3ημx + 1 - ημ^2x = 0$

$\Leftrightarrow 2ημ^2x - 3ημx + 1 = 0.$

Δ3. $3f^2(x) - 3f(x) + συν^2x = 0 \Leftrightarrow 2ημ^2x - 3ημx + 1 = 0$

Θέτω $ημx = ω$: $2ω^2 - 3ω + 1 = 0$

$Δ = 9 - 8 = 1$

$ω = \frac{3 \pm 1}{2}$ → 1, → 1/2.

$ημx = 1$ ή $ημx = 1/2$

$ημx = ημ\frac{π}{2}$ ή $ημx = ημ\frac{π}{6}$

$x = 2κπ + \frac{π}{2},\ κ\in Z$ $\quad x = 2κπ + π/6,\ κ \in Z$.

ή

$x = 2κπ + π - π/6 \Leftrightarrow$

$x = 2κπ + \frac{5π}{6},\ κ\in Z$

Δ4. $g(x)=(2\sigma\upsilon\nu\omega+1)\eta\mu x+1$ Μέγιστη τιμή 3:

$2\sigma\upsilon\nu\omega+1+1=3 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\omega=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=1/2$

Δ5. Α. $\sigma\upsilon\nu\omega = 1/2$ Άρα $g(x)=2\eta\mu x+1$ και $f(x)=\eta\mu x$

$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ Άρα $\eta\mu^2\omega=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\omega=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Όμως $\omega\in(0,\pi/2)$: $\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ και $\sigma\varphi\omega=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(x)=\eta\mu x$

Β. $f(2\pi+x)=\eta\mu(2\pi+x)=\eta\mu x$

$f(\pi-x)=\eta\mu(\pi-x)=\eta\mu x$

$g(\frac{3\pi}{2}+x)=2\eta\mu(\frac{3\pi}{2}+x)+1=-2\sigma\upsilon\nu x+1$

$f(\frac{\pi}{2}+x)=\eta\mu(\frac{\pi}{2}+x)=\sigma\upsilon\nu x$

$A=4f(2\pi+x)\cdot f(\pi-x)+g^2(\frac{3\pi}{2}+x)+4f(\frac{\pi}{2}+x)$

$A=4\eta\mu x\cdot\eta\mu x+(-2\sigma\upsilon\nu x+1)^2+4\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$A=4\eta\mu^2x+4\sigma\upsilon\nu^2x-\cancel{4\sigma\upsilon\nu x}+1+\cancel{4\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$

$A=4(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)+1$

$A=4+1 \Leftrightarrow A=5$