ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πρότυπο

1.). Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2015^2-1}{2015^2-3\cdot 2015+2}=\dfrac{2016}{2013}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+2x}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

β. Να υπολογιστεί η παράσταση $A=\dfrac{f(3)-f(1)}{\sqrt{f(5)}-2}$.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $|f(5)x-1|=|2-f(3)x|$.

3. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$ και $B=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$

α. Να αποδείξετε ότι $A=2$

β. Να αποδείξετε ότι $B=2$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^3=\dfrac{1}{A+\sqrt{A}}+\dfrac{1}{A-\sqrt{A}}$

4. **α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $\lambda\left(x^2+x+1\right)=3x^2$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν $x_1,\ x_2$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ρίζες αυτές ικανοποιούν τη σχέση $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+\left(\dfrac{3}{\lambda-3}\right)^2$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lambda\left(x^2+x+1\right)<3x^2$ για κάθε πραγματικό x.

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(2\lambda-1)x+\lambda^2=0$.

α) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές;

β) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και αντίστροφες;

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι δυο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν τα $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x_1^2+x_2^2\le x_1+x_2-2$.

δ) Αν x_1 και x_2 είναι οι δυο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί η εξίσωση που έχει ρίζες $\rho_1=\dfrac{1}{x_1}$ και $\rho_2=\dfrac{1}{x_2}$.

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda+1)x+\lambda=0$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ.

ii. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$

iii. Για λ=3, να κατασκευάσετε εξίσωση *2ου* βαθμού με ρίζες $2x_1$ και $2x_2$.

. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2\alpha x-5, & -5\le x<2 \\ x+\beta\ , & 2\le x<5 \end{cases}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Για την οποία ισχύουν: $f(-2)=f(4)$ και $f(2)=f(-1)$.

α) Να δείξετε ότι α= -1 και β= - 5.

β) Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=(\lambda^4+2)x+f(1)$ και

$(\varepsilon_2): y=(13\lambda^2-34)x+f(-3)$ να είναι παράλληλες.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=1$.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^4-\alpha x^2+2$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

α) Να αποδείξετε ότι α = 6.

β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=f(1)$

δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)-f(1)\le 0$.

Η εξίσωση $x^2-\lambda x+3\lambda=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1,x_2.

α) Να αποδείξετε ότι λ < 0 ή λ > 12.

β) Για λ = - 4 :

i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης είναι ετερόσημες.

ii) Αν x_2 είναι η αρνητική ρίζα της εξίσωσης, να λύσετε την ανίσωση $|x+2011|\le x_2$.

iii) Αν x_1 είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης, να δείξετε ότι $\sqrt[3]{x_1\sqrt{x_1}}=\sqrt{2}$.

Δίνεται το τριώνυμο $4x^2-4\lambda x+5\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές του λ.

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

i. Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.

ii. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4\lambda x+5\lambda}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, για την οποία το τριώνυμο έχει δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1+x_2=x_1x_2-1$.

. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\Delta x+\Delta=0$ (1) όπου Δ είναι η διακρίνουσα της.

α. Να βρείτε τις τιμές του Δ και το πλήθος των ριζών της (1).

Για Δ = 5, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$g(x)=\sqrt{x^2-2(x_1x_2)x+5(x_1+x_2)}$, $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1).

β. i) Να αποδείξετε ότι $g(x)=|x-5|$

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.