

Πρότυπο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ: ΕΡΓΑΣΙΑ Νο 3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τα κενά:

- α) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι **ίσοι**.
- β) Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το **μισό** της υποτείνουσας.
- γ) Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο ονομάζεται **ορθόμετρο** του τριγώνου.
- δ) Ένα παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και μία του γωνία ορθή είναι **τετράγωνο**.
- ε) Ένα τετράπλευρο που έχει τρεις γωνίες του ορθές είναι **ορθογώνιο**.
- ζ) Τραπεζίο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει δύο **απέναντι** πλευρές **παράλληλες**. Οι **παράλληλες** πλευρές λέγονται **βάσεις** και η απόστασή τους λέγεται **ύψος**. Διάμεσος του τραpezίου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα **μέσα** των **μη-παράλληλων** πλευρών.
- η) Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα **$\frac{2}{3}$** του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου. Το κοινό σημείο των διαμέσων ονομάζεται **βαρύμετρο** του τριγώνου.

2. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$ φέρνουμε το ύψος AD . Προεκτείνουμε το ύψος AD κατά $DE=AD$. Από το E φέρνουμε παράλληλη στην AB που τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z και την $A\Gamma$ στο H .

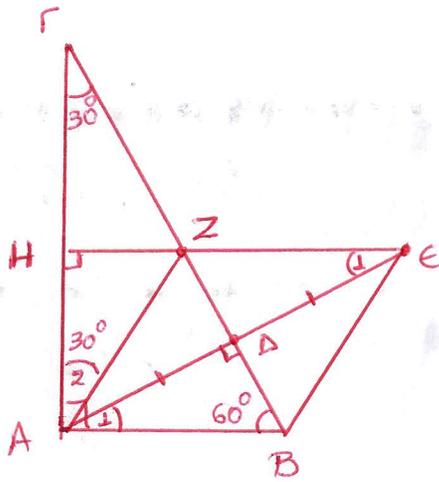
A. Να δείξετε ότι $\hat{\Gamma}=30^\circ$.

B. Να δείξετε ότι $AB=EZ$.

Γ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABEZ$ είναι ρόμβος.

Δ. Να δείξετε ότι $AZ = \frac{B\Gamma}{2}$, το Z είναι το μέσο της $B\Gamma$ και το H είναι μέσο της $A\Gamma$.

Ε. Να δείξετε ότι το $AZ\Gamma$ τρίγωνο είναι ισοσκελές και ότι $ZH = \frac{B\Gamma}{4}$.



A. Αφού $\hat{A}=90^\circ$ τότε
 $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow$
 $3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \underline{\underline{\hat{\Gamma} = 30^\circ}}$

B. Συγκρίνω $\triangle ABD$ $\triangle EZD$ ορθογ.
 $AD = DE$ υπόθεση
 $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ εως ευθείας.

Άρα $\triangle ABD = \triangle EZD \Rightarrow AB = EZ$ ①
 $BD = ZD$ ②

Γ. Το $ABEZ$ είναι παρ/μο διότι $AB \parallel EZ$. (από ① & υπόθεση)
 Οι διαγώνιες AE & BZ τέμνονται κάθετα οπότε το $ABEZ$
 ρόμβος.

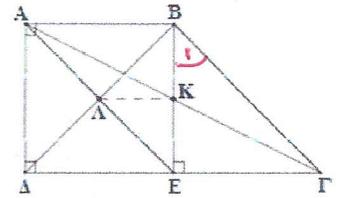
Δ. Στο $\triangle AB\Gamma$ ορθογ. $\hat{\Gamma}=30^\circ$, οπότε $AB = \frac{B\Gamma}{2}$, το $ABEZ$ ρόμβος
 άρα $AZ = AB = \frac{B\Gamma}{2}$. Όμως $\hat{B}=60^\circ$ οπότε το $\triangle ABZ$ ισόπλευρο
 οπότε $AZ = AB = BZ = \frac{B\Gamma}{2}$. Τότε Z μέσο $B\Gamma$.

Στο $\triangle AB\Gamma$, Z μέσο $B\Gamma$, $ZH \parallel AB$ οπότε H μέσο $A\Gamma$.

Ε. Το $\triangle AZB$ ισόπλευρο, $\hat{A}B = 60^\circ$ οπότε $\hat{A}_2 = 90^\circ - 60^\circ$
 $\hat{A}_2 = 30^\circ$. Το $\triangle AZ\Gamma$ ισοσκελές με $\hat{\Gamma} = \hat{A}_2 = 30^\circ$

Στο $\triangle AB\Gamma$ η ZH ενώνει τα μέσα δύο πλευρών οπότε
 $ZH = \frac{AB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} \Leftrightarrow ZH = \frac{B\Gamma}{4}$

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:



- α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$
- β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- δ) $BD = AE$ και $AE \perp BD$.
- ε) $KL = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$.

α. Σω ΑΒΓΔ: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$

β. Το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο παρ/μο διότι $\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$
 Τότε $AB = ED$ και επειδή $\Delta\Gamma = 2AB \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2E$ τότε το Ε μέσο ΔΓ. Άρα $AB = DE = EG$.

Το ΑΒΕΓ παρ/μο διότι $AB \parallel EG$

γ. Σω ΒΕΓ ορθογ. $\hat{E} = 90^\circ$ $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ οπότε $\hat{B}_1 = 45^\circ$
 Άρα ΒΕΓ ορθογ & ισοσκελές αφού $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = 45^\circ$

δ. Το ΒΕΓ ορθογώνιο & ισοσκελές, $BE = EG$ με $EG = AB$
 οπότε $AB = BE$. Το ΑΒΕΓ ορθογώνιο με δυο διαδοχικές πλευρές ίσες άρα τετράγωνο.

Τότε $AE = BD$ (διαγώνιες ίσες) & $AE \perp BD$ (τέμνονται κάθετα)

ε). Σω ΒΔΕ με ΛΓ ενώνοντα τα μέσα δυο πλευρών, διότι σω ΑΒΕΔ & ΑΒΓΕ οι διαγώνιες διχοτομούνται,

οπότε $KL = \frac{AE}{2} = \frac{\frac{\Delta\Gamma}{2}}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{4}$