

πεότνε

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΑ' ΛΥΚΕΙΟΥ
30/03/2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. (Mov. 5)

Θεωρία Sx. Bibliou

A2. a. Να διατυπωθούν ο ορισμός και οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου (Mov. 4)

Θεωρία Sx. Bibliou

b. Να δώσετε τον ορισμό του τετραγώνου. (Mov. 2)

Θεωρία.

A3. Να συμπληρωθούν με τη σωστή λέξη τα παρακάτω κενά:

i. Σε κάθε οόλιο οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του. (Τερράχινο)

ii. Σε κάθε Τερράχινο οι διαγώνιοι είναι ίσες. (Ορθογώνιο)

iii. Αν ένας ρόμβος έχει ίσες χωρίς τότε είναι τετράγωνο. (Διαχώνις)

iv. Ένα παραλληλόγραμμο με κινήσεις διαγώνιες, είναι ρόμβος. (Mov. 4)

A5. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

S α. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου.

L β. Στο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα και είναι ίσες.

L γ. Ρόμβος είναι το τετράπλευρο που έχει κάθετες διαγώνιες.

L δ. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια οξεία γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το διπλάσιο της υποτείνουσας.

S ε. Αν ένα τετράπλευρο έχει τρείς ορθές γωνίες, τότε είναι ορθογώνιο.

(Mov. 10)

ΘΕΜΑ Β

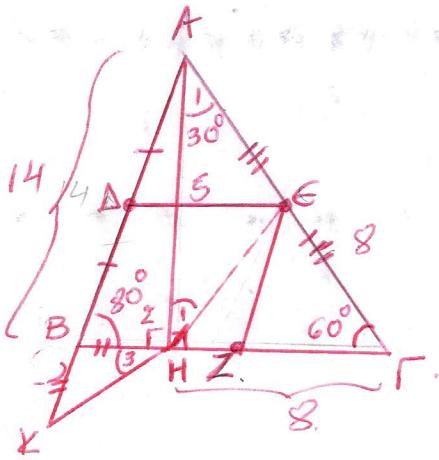
Δίνεται τρίγωνο ABG με $\hat{A}=40^\circ$ και $\hat{B}=80^\circ$. Τα σημεία D, E, Z είναι τα μέσα των AB, AG, BG αντίστοιχα με $AB=14$, $AE=5$ και $EG=8$.

B1. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές. (Mov. 4)

B2. Να βρείτε τα μήκη των AG , BG , EZ καθώς και την περίμετρο του τριγώνου ABG . (Mov. 12)

B3. Φέρνουμε το ύψος AH και την HE . Να υπολογίσετε το μήκος της HG της HE και να δείξετε ότι το τρίγωνο HEG είναι ισόπλευρο. (Mov. 6)

B4. Στην προέκταση της AB παίρνουμε τμήμα $BK=BG$. Να εξετάσετε αν τα σημεία K, H, E είναι συνευθειακά. (Mov. 3)



$$\text{B1. } \text{Στο } \triangle ABG: \hat{A} + \hat{B} + \hat{G} = 180^\circ \Leftrightarrow \\ 40^\circ + 80^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \\ \hat{G} = 60^\circ$$

Άρα το $\triangle ABG$ δεν είναι ισοσκελές.

$$\text{B2. } \text{Αφού } EG = 8 \text{ τότε } AG = 16 \\ \text{Η } HE \text{ είναι τα μέσα δύο πλευρών } \\ \text{οπότε } HE = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow BG = 10$$

$$\text{και } EZ = \frac{AB}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$Π_{ABG} = 14 + 16 + 10 = 40.$$

$$\text{B3. } \text{Στο } \triangle AHG \text{ ορθογ } \hat{G} = 60^\circ \text{ οπότε } \hat{A}_1 = 30^\circ \text{ οπότε } HG = \frac{AG}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

$$\text{και } HE \text{ διάμεσος: } HE = \frac{AG}{2} = \frac{16}{2} = 8. \text{ Το } HEG \text{ ισόπλευρο διότι} \\ HE = EG = HG = 8.$$

B4.

HEG ισόπλευρο, άρα $\hat{H}_1 = 90^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \hat{H}_1 = 30^\circ$.

$\hat{H}_2 = 90^\circ$ διότι AH ύψος.

Στο BKH η $\hat{B} = 80^\circ$ είναι εσωτερική οπότε $\hat{E} + \hat{H}_3 = 80^\circ$ και
επειδή είναι ισοσκελές $\hat{H}_3 = \hat{E} = 40^\circ$.

Τότε $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 = 30^\circ + 90^\circ + 40^\circ = 160^\circ$ οπότε δεν είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο $\Delta A B G$ με $A G = 2 A B$. Φέρνουμε τη διχοτόμο $A D$ και από το B κάθετη στην $A D$ που την τέμνει στο K και την $A G$ στο E . Προεκτείνουμε την $B E$ κατά $E Z = B E$. Αν M το μέσο της πλευράς $B G$ τότε:

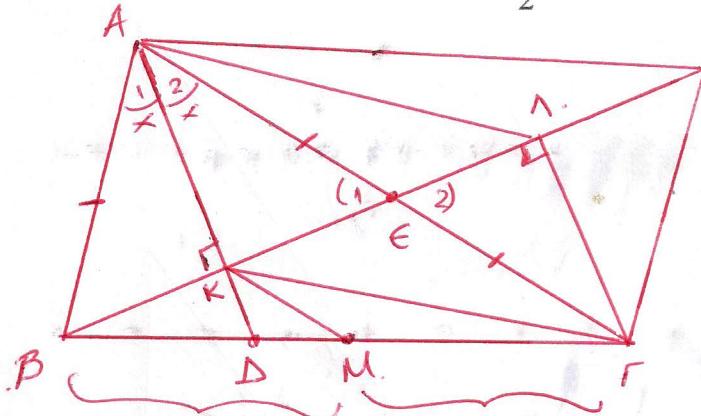
Γ1. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta A B E$ είναι ισοσκελές. (Mov. 6)

Γ2. να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A Z G B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Mov. 5)

Φέρνουμε ΓL κάθετη στην $B Z$.

Γ3. να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A \Gamma K \Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Mov. 8)

Γ4. να αποδείξετε ότι $K M = \frac{A B}{2}$. (Mov. 6)



Γ1. Στο $\Delta A B E$ η $A E$ είναι διχοτόμος και ύψος ἀρα το γρίγιων είναι ισοσυναίσ. $A B = A E$, ἀρα $A E = E G = A B$

Γ2. Στο $A Z G B$ οι διαχώνες $A G$ και $B Z$ διχοτομούνται ώστε E οριστέ $A E = E G$ & $B C = E Z$. Υπό το $A Z G B$ παρ/μο

Γ3. Συγκρίνω $A K E$ $\hat{\Delta}$ $G L E$ ορθογ. $\left\{ \begin{array}{l} A E = E G, E \text{ μέσο } A G \text{ από } \Gamma 1. \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \text{ κατανορυφήτε} \end{array} \right.$ $A K E = G L E \Rightarrow A K = G L$.

Στο $A K G L$: $A K = G L$ & $A K / / G L$ ως κάθετες στην $B Z$.
Υπό $A K / / G L$ οπότε το $A K G L$ παρ/μο.

Γ4. Στο $\Delta A B E$ ισοσυναίσ. $A E$ διχοτόμος, ύψος ἀρα και διάμεσος. Δηλαδή M μέσο $B E$.

Στο $B E F$ το $K M$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών οπότε $K M = \frac{E F}{2}$. Όμως $E F = A E = A B$

Υπό $K M = \frac{A B}{2}$

ΘΕΜΑ Δ

Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABG ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 2\hat{G}$ φέρνουμε τη διάμεσο AM . Αν E, Z τα μέσα AB και AG αντίστοιχα και η EZ τέμνει την AM στο Θ τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι $\hat{B} = 30^\circ$. (Mov. 3)

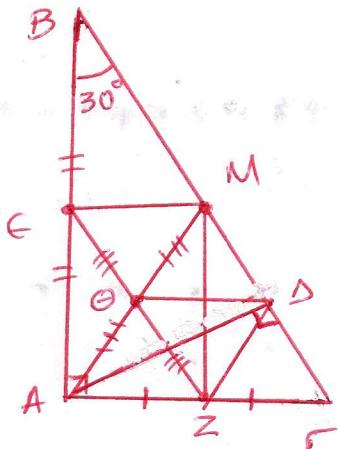
Δ2. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AEMZ$ είναι ορθογώνιο. (Mov. 6)

Δ3. Να δείξετε ότι $EZ = AM = AG$ και ότι $A\Theta = \frac{BG}{4}$. (Mov. 8)

Δ4. Να δείξετε ότι το AMG τρίγωνο είναι ισόπλευρο. (Mov. 3)

Φέρνουμε το ύψος AD .

Δ5. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Theta DZ$ είναι ρόμβος. (Mov. 5)



Δ1. Στο $\triangle ABG$ ορθογώνιο:
 $\hat{B} + \hat{G} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow$
 $3\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$

Δ2 Στο $\triangle ABG$ η με ενώνει τα μέσα δύο πλευρών. Άρα $MEII = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow$
 $MEII = AZ$. Τότε το $AEMZ$ ισπ/μο
με $\hat{A} = 90^\circ$ άρα ορθογώνιο.

Δ3. Στο $AEMZ$ ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι ίσες: $EZ = AM$.

Στο $\triangle ABG$ ορθογ. $AM = \frac{BG}{2}$ (Διάμεσος) & $AG = \frac{BG}{2}$ (Ανέραρχης από 30°)
Άρα $AM = EZ = AG$ και $A\Theta = \frac{AM}{2} = \frac{\frac{BG}{2}}{2} \Leftrightarrow A\Theta = \frac{BG}{4}$

Δ4. Αφού $AM = AG = MG = \frac{BG}{2}$ τότε το AMG ισόπλευρο.

Δ5. Το AMG ισόπλευρο οπότε το ύψος AD είναι και διάμεσος. Άρα το Δ. μέσο της MG .

Στο $\triangle AMG$ η ΘΔ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών.
Οπότε $\Theta DII = \frac{AG}{2} \Leftrightarrow \Theta DII = AZ$. Άρα το $A\Theta DZ$ ισπ/μο.

Όμως $A\Theta = \frac{BG}{4}$ (Δ3) και $AZ = \frac{BG}{2} = \frac{\frac{BG}{2}}{2} = \frac{BG}{4}$

Οπότε $A\Theta = AZ$ (Διαδοχικές ομεμπές) άρα το $A\Theta DZ$ ρόμβος. (τι $A\Delta \perp \theta$ οι διαγώνιες σέρνονται κάθετες διότι $EZ \parallel BG$.)