ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πρότυπο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

04/05/2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν α>0 με α ≠ 1, τότε για οποιοδήποτε θ>0 και k ε **R**,

ισχύει: $\log_\alpha \theta^k = k \log_\alpha \theta$ Απόδειξη Θεωρίας. Σελ 175. [Μον. 6]

Α2. Αν α>0 με α ≠ 1, και θ>0 να δώσετε τον ορισμό του λογάριθμου του θ ως προς βάση α.

Θεωρία Σχ. Βιβλίου Σελ 174 Μον. 3]

Α3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ και να συμπληρώσετε:

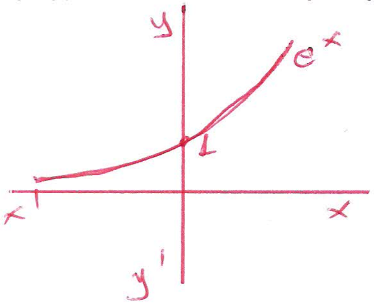
Πεδίο ορισμού: $A = R$

Σύνολο τιμών: $f(A) = (0,+\infty)$

Μονοτονία: γν. Αύξουσα.

Αν $x_1 < x_2$ ⇔ $e^{x_1} < e^{x_2}$

Τέμνει τον άξονα : $y'y$: $(0,1)$



[Μον. 6]

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

α. Αν $\theta_1,\theta_2 >0$ τότε ισχύει: $\ln(\theta_1+\theta_2)=\ln(\theta_1\theta_2)$. Λ

β. Αν α>1, η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ είναι γνησίως αύξουσα. Σ

γ. Αν ισχύει $(\frac{1}{3})^x > (\frac{1}{3})^5$ τότε x> 5. Λ

δ. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = (\frac{1}{e})^x$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y'y. Σ

ε. Ισχύει $\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$, θ > 0 . Σ [Μον 10]

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2 - \alpha^2)^x$, $x \in R$, $\alpha \in R$.

B1. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f ορίζεται στο R; [Μον. 7]

B2. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι γνησίως φθίνουσα; [Μον. 6]

B3. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι γνησίως αύξουσα; [Μον. 3]

B4. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι σταθερή; [Μον. 3]

B5. Για $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\sqrt{2f(2x)-5f(x)+3}$

[Μον. 6]

B1. Πρέπει $2-\alpha^2>0$

Ρίζες: $2-\alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{2}$

α		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$2-\alpha^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Άρα $\alpha \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

B2. Γν. φθίνουσα $0<2-\alpha^2<1$

$2-\alpha^2>0$ και $2-\alpha^2<1$

$\alpha \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\quad$ $1-\alpha^2<0$

α		-1		1	
$1-\alpha^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\alpha<-1$ ή $\alpha>1$

Συναληθεύω

$-\sqrt{2}$ $\quad -1$ $\quad 1$ $\quad \sqrt{2}$

$\alpha \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

B3. Γν. αύξουσα: $2-\alpha^2>1 \Leftrightarrow 1-\alpha^2>0 \Leftrightarrow \alpha \in (-1,1)$

B4. Σταθερή: $2-\alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha=1$ ή $\alpha=-1$

B5. Για $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$: $f(x)=\left[2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^x=\left(2-\frac{2}{4}\right)^x=\left(\frac{6}{4}\right)^x \Leftrightarrow$

$f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$: $\quad A_g$: πρέπει $2f(2x)-5f(x)+3 \geq 0 \Leftrightarrow$

$2\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5\left(\frac{3}{2}\right)^x+3 \geq 0$

Θέτω $\left(\frac{3}{2}\right)^x=y$: $\quad 2y^2-5y+3 \geq 0$

$\Delta=25-24=1$

$y=\frac{5\pm1}{4}=\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\ \frac{4}{4}=1\end{cases}$

y		1		$3/2$	
$2y^2-5y+3$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $y \in (-\infty, 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$ οπότε $y \leq 1$ ή $y \geq \frac{3}{2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \left(\frac{3}{2}\right)^0$ ή $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \left(\frac{3}{2}\right)^1$

$x \leq 0$ ή $x \geq 1$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{\dfrac{8^x-\alpha}{2^x}}$ και $g(x)=\sqrt{4\cdot 2^x-4}$.

Γ1. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2, \sqrt{12})$ να αποδείξετε ότι $\alpha=16$ [Μον. 4]

Γ2. Για $\alpha=16$

Α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. [Μον. 4]

Β. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g. [Μον. 8]

Γ. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y. [Μον. 4]

Δ. Να βρείτε το σημείο τομής της συνάρτησης g με την ευθεία $y = 2$. [Μον. 5]

Γ1. Διέρχεται $A(2,\sqrt{12})$: $f(2)=\sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{8^2-\alpha}{2^2}}=\sqrt{12} \Leftrightarrow$

$\dfrac{64-\alpha}{4}=12 \Leftrightarrow 64-\alpha=48 \Leftrightarrow \underline{\alpha=16}$

Γ2.Α. $f(x)=\sqrt{\dfrac{8^x-16}{2^x}}$: πρέπει $\dfrac{8^x-16}{2^x}\geq 0 \overset{2^x\neq 0}{\Leftrightarrow} 8^x-16\geq 0$ διότι $2^x>0$

$8^x\geq 16 \Leftrightarrow 2^{3x}\geq 2^4 \overset{\alpha=2>1}{\Leftrightarrow} 3x\geq 4 \Leftrightarrow x\geq \frac{4}{3}$ $A_f=[\frac{4}{3},+\infty)$

• $g(x)=\sqrt{4\cdot 2^x-4}$: πρέπει $4\cdot 2^x-4\geq 0 \Leftrightarrow 4\cdot 2^x\geq 4 \Leftrightarrow$

$2^x\geq 1 \Leftrightarrow 2^x\geq 2^0 \Leftrightarrow x\geq 0$ $A_g=[0,+\infty)$

Β. $f(x)=g(x) \overset{x\geq 4/3}{\Leftrightarrow} \sqrt{\dfrac{8^x-16}{2^x}}=\sqrt{4\cdot 2^x-4} \Leftrightarrow \dfrac{8^x-16}{2^x}=4\cdot 2^x-4$

επη $=2^x$: $2^{3x}-16=4\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{3x}-4\cdot 2^{2x}+4\cdot 2^x-16=0$

Θέτω $2^x=\omega$: $\omega^3-4\cdot\omega^2+4\omega-16=0 \Leftrightarrow$

$\omega^2(\omega-4)+4(\omega-4)=0 \Leftrightarrow (\omega-4)(\omega^2+4)=0$

$\omega-4=0$ ή $\omega^2+4=0$ ΑΔ

$\omega=4 \Leftrightarrow 2^x=4 \Leftrightarrow x=2$ δεκτή

Για $x=2$: $g(2)=\sqrt{4\cdot 2^2-4}=\sqrt{12}$ Άρα $A(2,\sqrt{12})$

Γ. Σημείο τομής με x΄x: $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{8^x-16}{2^x}}=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{8^x-16}{2^x}=0 \overset{2^x\neq 0}{\Longleftrightarrow} 8^x=16 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ $(\frac{4}{3},0)$

Σημείο τομής με y΄y δεν έχει διότι το $x=0\notin A_f$.

Δ. Σημείο τομής της g με την $y=2$:

$$g(x)=2 \Leftrightarrow \sqrt{4\cdot 2^x-4}=2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{4\cdot 2^x-4}\right)^2=2^2 \Leftrightarrow$$

$$4\cdot 2^x-4=4 \Leftrightarrow$$

$$4\cdot 2^x=8 \Leftrightarrow \quad 2^x=2 \Leftrightarrow x=1$$

Σημείο τομής $(1,2)$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \lambda x^2 - \mu x + e$ *όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί.*

Δ1. Αν το P(x) έχει παράγοντα το (x-e) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x-2) είναι ίσο με 6 − 3e τότε να δείξετε ότι λ = e και μ = 1. [Μον. 8]

Δ2. Για λ = e και μ = 1 : α. να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$. [Μον. 4]

β. να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 0$ [Μον. 3]

γ. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $P(\frac{1}{e})P(\ln e^2)P(2019)$ [Μον. 2]

δ. να λύσετε την ανίσωση: $\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)^{P(x)} < 1$. [Μον. 2]

ε. να λύσετε την ανίσωση: $e^{P(x)} < 1$ [Μον. 2]

στ. να λύσετε την εξίσωση: $e^x - e = \frac{1-e^{1-x}}{e^x}$ [Μον. 4]

Δ1. Παράγοντας $(x-e)$: $P(e)=0 \Leftrightarrow e^3-\lambda e^2-\mu e+e=0 \Leftrightarrow$
$\lambda e^2+\mu e = e^3+e \Leftrightarrow$ (δια e)
$\lambda e+\mu = e^2+1$.

$P(x):(x-2)$ $\upsilon=6-3e$: $P(2)=6-3e \Leftrightarrow 8-4\lambda-2\mu+e=6-3e \Leftrightarrow$
$-4\lambda-2\mu=-2-4e$ (δια −2)
$-2\lambda-\mu=-1-2e$

(Σ) $\lambda e+\mu=e^2+1$
$-2\lambda-\mu=-1-2e$ (+)
$\lambda e-2\lambda = e^2-2e \Leftrightarrow \lambda(e-2)=e(e-2) \Leftrightarrow \lambda=e$; $-2e-\mu=-1-2e \Leftrightarrow \mu=1$

Δ2. $\lambda=e$, $\mu=1$: $P(x)=x^3-ex^2-x+e$.

α. $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-ex^2-x+e=0 \Leftrightarrow x^2(x-e)-(x-e)=0 \Leftrightarrow$
$(x-e)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$
$x=e$ ή $x=1$ ή $x=-1$

β. $P(x)<0 \Leftrightarrow (x-e)(x^2-1)<0$

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,e)$

x	$-\infty$		-1		1		e		$+\infty$
$x-e$		−		−		−	0	+	
x^2-1		+	0	−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

γ. $-1<\frac{1}{e}<1$: $P(1/e)>0$
$\ln e^2=2$ οπότε $1<\ln e^2<e$: $P(\ln e^2)<0$
$2019>e$: $P(2019)>0$

$P(1/e)\cdot P(\ln e^2)\cdot P(2019)<0$.

δ. $\left(ημ\frac{π}{6}\right)^{P(x)} < 1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{P(x)} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \xLeftrightarrow{α=1/2<1} P(x) > 0 \iff$

$x \in (-1,1) \cup (e,+\infty)$

ε. $e^{P(x)} < 1 \iff e^{P(x)} < e^0 \xLeftrightarrow{α=e>1} P(x) < 0 \iff$

$x \in (-\infty,-1) \cup (1,e)$

στ. $e^x - e = \frac{1-e^{1-x}}{e^x} \xLeftrightarrow{ΕΚΠ=e^x} e^{2x} - e\cdot e^x = 1 - e^1\cdot e^{-x} \iff$

$e^{2x} - e\cdot e^x = 1 - \frac{1}{e^x}$ ΕΚΠ$=e^x$ $\iff e^{3x} - e\cdot e^{2x} = e^x - 1 \iff$

$e^{3x} - e\cdot e^{2x} - e^x + 1 = 0$ Θέτω $e^x = ω$.

$ω^3 - e\cdot ω^2 - ω + 1 = 0 \xRightarrow{α}$

$ω = -1$ ή $ω = 1$ ή $ω = e$

$e^x = -1$ ή $e^x = 1$ ή $e^x = e$

ΑΔ $\underline{\underline{x=0}}$ ή $\underline{\underline{x=1}}$