ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πρότυπο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
9/02/2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει:

α. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$. β. εφω = $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και σφω = $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ με $\eta\mu\omega \neq 0$

Θεωρία Σχολικού Βιβλίου Σελ 60 **Μονάδες: 7**

Α2. Με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου να συμπληρώσετε τις ανισότητες :

α. $-1 \le \eta\mu\omega \le 1$ β. $-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1$ γ. $0 \le \eta\mu^2\omega \le 1$ δ. $0 \le \sigma\upsilon\nu^2\omega \le 1$ **Μονάδες: 2**

Α3. α. Τι ονομάζουμε μονώνυμο και τι πολυωνύμου του x; **Μονάδες: 3**
β. Τι ονομάζουμε ρίζα ενός πολυωνύμου P(x) και τι αριθμητική τιμή ; **Μονάδες: 3**

Θεωρία Σχ. Βιβλίου Σελίδες 128 και 129

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Σ α. Η εξίσωση ημx= $\sqrt{3}$ είναι αδύνατη.

Λ β. Έστω P(χ) σταθερό πολυώνυμο και P(-1)=2.Τότε το P(1)= -2.

Σ γ. Το πολυώνυμο $P(x) = 2018x^3 - 2019x - 1$ έχει ρίζα το x = -1.

Σ δ. Για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύει συν(−x)= συν(x).

Λ ε. Η τιμή $x = \frac{\pi}{3}$ είναι λύση της εξίσωσης $2\sigma\upsilon\nu 3x - 1 = 0$ **Μονάδες: 10**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να λύσετε την εξίσωση: $4συν^2x - 8ημx - 7 = 0$. **Μονάδες: 8**

Β2. Θεωρούμε τη γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και $ημx = -\frac{1}{2}$

α) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x. **Μονάδες: 8**

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \dfrac{ημ(\pi + x)\cdot συν(3\pi - x) + εφ(\frac{\pi}{2} + x)}{ημ(\frac{3\pi}{2} - x)\cdot ημ(\pi - x) + σφ(2\pi + x)}$ και να υπολογίσετε την αριθμητική της τιμή. **Μονάδες: (6+3)**

Β1 $4συν^2x - 8ημx - 7 = 0 \Leftrightarrow 4(1-ημ^2x) - 8ημx - 7 = 0 \Leftrightarrow$
$4 - 4ημ^2x - 8ημx - 7 = 0 \Leftrightarrow -4ημ^2x - 8ημx - 3 = 0 \Leftrightarrow$
$4ημ^2x + 8ημx + 3 = 0$ Θέτω $ημx = ω$:
$4ω^2 + 8ω + 3 = 0$
$Δ = 64 - 48 = 16$
$ω = \frac{-8 \pm 4}{8}$ → $\frac{-4}{8} = -1/2$, → $\frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$

Άρα
$ημx = -\frac{1}{2}$ ή $ημx = -\frac{3}{2}$ Απορ. διότι $-1 \le ημx \le 1$
$ημx = ημ(-\pi/6)$
$x = 2κ\pi - \pi/6$ $κ \in Z$
$x = 2κ\pi + \pi + \pi/6$

Β2.α. $ημx = -\frac{1}{2}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

$συν^2x + ημ^2x = 1 \Leftrightarrow συν^2x = 1 - ημ^2x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Άρα $συνx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ και αφού $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{-\frac{1}{2}}{+\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow εφx = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $σφx = -\sqrt{3}$

β. $ημ(\pi+x) = -ημx$
$συν(3\pi - x) = συν(2\pi + \pi - x)$
$= συν(\pi - x) = -συνx$
$εφ(\frac{\pi}{2} + x) = -σφx$
$ημ(\frac{3\pi}{2} - x) = -συνx$
$ημ(\pi - x) = ημx$
$σφ(2\pi + x) = σφx$

$A = \dfrac{-ημx\cdot(-συνx) - σφx}{-συνx\cdot ημx + σφx}$

$A = \dfrac{ημx\cdot συνx - σφx}{-ημx\cdot συνx + σφx}$

$A = -\dfrac{ημx\cdot συνx - σφx}{ημx\cdot συνx - σφx}$

$A = -1$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (|\lambda|-1)\, x^4 - (\lambda^2-1)x^3 + (\lambda^3-1)x^2 - \lambda^3 x + 3$.

Γ1. Να βρείτε τον βαθμό του P(x) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$. **Μονάδες: 6**

Γ2. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το x= 1 να υπολογίσετε τις τιμές του λ. **Μονάδες: 7**

Γ3. Για λ = 2

α. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το πολυώνυμο (x-1) και με το πολυώνυμο (x^2+1) . **Μονάδες: 6**

β. Αν $Q(x) = (3\alpha - \beta)x^4 - 3x^3 + (\alpha + 3\beta)x^2+\mu^3 x + 3$, να βρείτε τις τιμές των α, β, μ, ώστε να είναι

$P(x) = Q(x)$ για κάθε $x \in R$. **Μονάδες: 6**

Γ1. • Αν $|\lambda|-1 \neq 0 \Leftrightarrow |\lambda| \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$
τότε το P(x) είναι 4ου βαθμού.

• Αν $|\lambda|-1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ή $\lambda=1$ τότε

Για $\lambda=-1$: $P(x)=0x^4-0x^3-2x^2+x+3 \Leftrightarrow$
$P(x)=-2x^2+x+3$, το P(x) 2ου βαθμού

Για $\lambda=1$: $P(x)=0x^4-0x^3+0x^2-x+3 \Leftrightarrow$
$P(x)=-x+3$, 1ου βαθμού

Γ2. Ρίζα το 1: $P(1)=0 \Leftrightarrow |\lambda|-1-(\lambda^2-1)+\cancel{\lambda^3}-1-\cancel{\lambda^3}+3=0 \Leftrightarrow$
$|\lambda|\cancel{-1}-\lambda^2\cancel{+1}-1+3=0 \Leftrightarrow$
$-\lambda^2+|\lambda|+2=0$ Ιδιότητα $|\lambda|^2=\lambda^2$
$-|\lambda|^2+|\lambda|+2=0$

Θέτω $|\lambda|=\omega$: $-\omega^2+\omega+2=0$
$\Delta=1+8=9$
$\omega=\frac{-1\pm3}{-2}$ → -1, → 2

Άρα $|\lambda|=-1$ ΑΔΥΝΑΤΗ ή $|\lambda|=2$
$\lambda=-2$ ή $\lambda=2$

Γ3. Για $\lambda=2$: $P(x)=x^4-3x^3+7x^2-8x+3$

α.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-3x^3+7x^2-8x+3 & x-1 \\ \hline
-x^4+x^3 & x^3-2x^2+5x-3 \\
-2x^3+7x^2-8x+3 & \\
+2x^3-2x^2 & \\
5x^2-8x+3 & \\
-5x^2+5x & \\
-3x+3 & \\
+3x-3 & \\
0 &
\end{array}
$$

Άρα $P(x)=(x-1)(x^3-2x^2+5x-3)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-3x^3+7x^2-8x+3 & x^2+1 \\ \hline
-x^4 \quad -x^2 & x^2-3x+6 \\
-3x^3+6x^2-8x+3 & \\
+3x^3 \quad +3x & \\
6x^2-5x+3 & \\
-6x^2 \quad -6 & \\
-5x-3 &
\end{array}
$$

Άρα $P(x)=(x^2+1)(x^2-3x+6)-5x-3$

β. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 8x + 3$

$Q(x) = (3\alpha-\beta)x^4 - 3x^3 + (\alpha+3\beta)x^2 + \mu^3 x + 3$

$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow 3\alpha - \beta = 1$ και $\alpha + 3\beta = 7$ και $\mu^3 = -8$

$\mu = -\sqrt[3]{8}$

$\mu = -2$

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha - \beta = 1 \\ \alpha + 3\beta = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ (-3 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3\alpha - \beta = 1 \\ -3\alpha - 9\beta = -21 \end{array}\right\} \oplus$$

$-10\beta = -20 \Leftrightarrow$

$\beta = 2$

↳ $3\alpha - 2 = 1 \Leftrightarrow$

$3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Άρα $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\mu = -2$ ώστε $P(x) = Q(x)$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (4ημ^2λ - 3)x^{1821} + (8συν^3κ+1)\,x^{2019} + (α+β)\,x^3 - (2α+β)x^2 + 7x + α + β$, με κ, λ, α, β ∈R.

Δ1. Αν το πολυώνυμο είναι $3^{ου}$ βαθμού να βρείτε τις τιμές των κ, λ ∈R. **Μονάδες: 6**

Δ2. Έστω $ημλ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $συνκ = -\dfrac{1}{2}$

Αν $P(-1) = -12$ και για $x = 2$ η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου είναι 21 να βρείτε τις τιμές των α, β ∈R. **Μονάδες: 6**

Δ3. Για $ημλ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $συνκ = -\dfrac{1}{2}$, α = 2 και β = 1

α. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$. **Μονάδες: 4**

β. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο P(x) διαιρείται με το πολυώνυμο (3x+1) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. **Μονάδες: 5**

γ. Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. **Μονάδες: 4**

Δ1. πρέπει $4ημ^2λ - 3 = 0$ και $8συν^3κ + 1 = 0$.

$ημ^2λ = \frac{3}{4}$ και $συν^3κ = -\frac{1}{8}$

$ημλ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $ημλ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $συνκ = -\frac{1}{2}$

$ημλ = ημ(-π/3)$ ή $ημλ = ημ\frac{π}{3}$ και $συνκ = -συν\frac{π}{3}$

$λ = 2ρπ - π/3$ ή $λ = 2ρπ + π + π/3$, $ρ∈Z$

$λ = 2ρπ + π/3$ ή $λ = 2ρπ + π - π/3$, $ρ∈Z$

$συνκ = συν(π - π/3)$

$συνκ = συν\frac{2π}{3}$

$κ = 2ρπ + \frac{2π}{3}$ ή $κ = 2ρπ - \frac{2π}{3}$, $ρ∈Z$.

Δ2. $P(x) = (a+b)x^3 - (2a+b)x^2 + 7x + a + b$

• $P(-1) = -12 \Leftrightarrow (a+b)(-1)^3 - (2a+b)(-1)^2 + 7(-1) + a + b = -12 \Leftrightarrow$

$\cancel{-a} - b - 2a - \cancel{b} - 7 + \cancel{a} + \cancel{b} = -12 \Leftrightarrow$

$-2a - b = -5 \Leftrightarrow 2a + b = 5$

• $P(2) = 21 \Leftrightarrow (a+b)2^3 - (2a+b)\cdot 2^2 + 7\cdot 2 + a + b = 21 \Leftrightarrow$

$\cancel{8a} + 8b - \cancel{8a} - 4b + 14 + a + b = 21 \Leftrightarrow$

$a + 5b = 7$

(Σ) $\left.\begin{array}{l} 2a+b=5 \\ a+5b=7 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-2)} \left.\begin{array}{l} 2a+b=5 \\ -2a-10b=-14 \end{array}\right\} (+)$ $-9b = 9 \Leftrightarrow b = 1$

$2a + b = 5 \Leftrightarrow a = 2$

Δ3. $P(x)=3x^3-5x^2+7x+3$

α.

$3x^3-5x^2+7x+3$	$x-1$
$-3x^3+3x^2$	$3x^2-2x+5$
$-2x^2+7x+3$	
$+2x^2-2x$	
$5x+3$	
$-5x+5$	
8	

$P(x)=(x-1)(3x^2-2x+5)+8$

Άρα $υ=8$.

β. $P(x):(3x+1)$

$3x^3-5x^2+7x+3$	$3x+1$
$-3x^3-x^2$	x^2-2x+3
$-6x^2+7x+3$	
$+6x^2+2x$	
$9x+3$	
$-9x-3$	
0	

$P(x)=(3x+1)\cdot(x^2-2x+3)$

με $υ=0$.

Άρα το $P(x)$ διαιρείται με το $3x+1$.

γ. $P(x)=0 \Leftrightarrow (3x+1)(x^2-2x+3)=0 \Leftrightarrow$

$3x+1=0$ ή $x^2-2x+3=0$

$x=-1/3$ ή $Δ=4-12=-8<0$

ΑΔΥΝΑΤΗ