πρότυπο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 03/01/2026
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

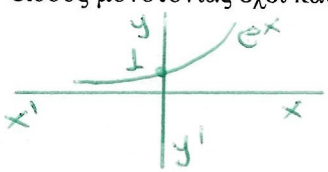
Α1) Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) $(2026)' = 0$ δ) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

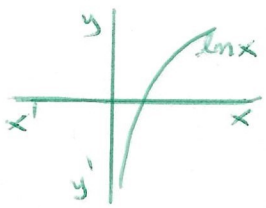
β) $(x^3)' = 3x^2$ ε) $(\ln x)' = 1/x$

γ) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ στ) $(e^x)' = e^x$ **(Μονάδες 6)**

Α2) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$. Ποιες είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει το x (πεδίο ορισμού), το $f(x)$ (σύνολο τιμών) και τι είδους μονοτονίας έχει κάθε μία από αυτές; **(Μονάδες 6)**



$A_f = R$, $f(A) = (0,+\infty)$
Μονοτονία: Γν. Αύξουσα.



$A_g = (0,+\infty)$
$g(A) = R$.
Μονοτονία: Γν. Αύξουσα.

Α3) «Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης στο x_0, θα πρέπει το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της».
Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση Αληθή ή Ψευδή και να δώσετε ένα παράδειγμα αιτιολογώντας την απάντησή σας. **(Μονάδες 3)**

Ψ

Το x_0 μπορεί να μην ανήκει στο π.ορισμού αρκεί να είναι άκρο ανοικτού διαστήματος.

π.χ. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $A = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$.

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με **Σ**ωστό ή **Λ**άθος.

Σ α) $(f(x)\cdot g(x))' = f(x)'g(x) + g(x)'f(x)$

Λ β) Ένα όριο της μορφής $\frac{\kappa}{0}$ μπορεί να είναι ή μόνο $+\infty$ ή μόνο $-\infty$

Λ γ) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)\cdot f(x) - g(x)\cdot f'(x)}{g^2(x)}$

Σ δ) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ είναι το $(0,+\infty)$

Σ ε) Αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες τότε θα έχουν σίγουρα ίδια πεδία ορισμού. **(Μονάδες10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha x-3,\ x\in R$ όπου $\alpha=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$

Β1) Να αποδείξετε ότι α=2 **(Μονάδες 5)**

Β2) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{f(x)}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **(Μονάδες 4)**

Β3) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x^3-1$ **(Μονάδες 5)**

Β4) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{4+x}-1}{f(x)}$ **(Μονάδες 6)**

Β1. $\alpha=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x-2)=2.$

Άρα $\alpha=2$ και $f(x)=x^2+2x-3$

Β2. α) $g(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$

π.ο. $x^2+2x-3\geq 0$ Ρίζες: $x^2+2x-3=0$

$\Delta=16,\ x=\dfrac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$

$A_g=(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

πρόσημο:

x		-3		1	
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+2x-3)\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x^2+2x-3}\cdot\sqrt{x^2+2x-3}}$ κοντά στο $x_0=1$ $x^2+2x-3>0$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+2x-3)(\sqrt{x^2+2x-3})}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{1+2-3}=0$

Β3. $f(x)=x^3-1,\quad x\in R$

$x^2+2x-3=x^3-1\Leftrightarrow$

$x^3-x^2-2x+2=0\Leftrightarrow x^2(x-1)-2(x-1)=0\Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2-2)=0\Leftrightarrow$

$x-1=0$ ή $x^2-2=0$

$x=1$ ή $x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Β4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{4+x}-1}{x^2+2x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(\sqrt{4+x}-1)(\sqrt{4+x}+1)}{(x+3)(x-1)(\sqrt{4+x}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(4+x-1)}{(x+3)(x-1)(\sqrt{4+x}+1)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)}{(x+3)(x-1)(\sqrt{4+x}+1)}=\dfrac{1}{-4\cdot 2}$

$=-\dfrac{1}{8}$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x+2}{x-1}, & x<1\\ \sqrt{x^2-x}+\alpha, & x\geq 1\end{cases}$, $\alpha\in R$

Γ1) Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ να αποδείξετε ότι α=0 **(Μονάδες 5)**

Για α=0:

Γ2) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'x **(Μονάδες 6)**

Γ3) Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **(Μονάδες 5)**

Γ4) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-2x}=f(0)+f(1)+f^2(2)$ **(Μονάδες 6)**

Γ5) Να βρείτε μία τουλάχιστον τιμή του x για την οποία η συνάρτηση f να ισούται με τη συνάρτηση $g(x)=\ln x$ **(Μονάδες 3)**

Γ1. $x<1$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-3x+2}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)(x^2+x-2)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1^+} x^2+x-2=0$

x^3-3x+2 :

	1	0	−3	2	1
↓		1	1	−2	
	1	1	−2	0	

$x>1$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(\sqrt{x^2-x}+a)=0+a=a.$

Άρα $a=0$

Γ2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x+2}{x-1}, & x<1\\ \sqrt{x^2-x}, & x\geq 1\end{cases}$

Σημεία τομής με x'x:

$x<1$: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0$

$x=1$ ή $x^2+x-2=0$

Απορ. $x=1$ ή $x=-2$, δεκτή $(-2,0)$

Απορ.

$x\geq 1$ $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x}=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0$

$x=0$ ή $x=1$

Απορ. δεκτή $(1,0)$.

Γ3 α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty.$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}\overset{x>0}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{1-\frac{1}{x}}=+\infty\cdot 1=+\infty.$

Γ4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2)} = 0$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2) = +\infty \cdot (-1) = -\infty$.

$f(0)+f(1)+f^2(2) = -2+0+(\sqrt{2})^2 = -2+2 = 0$.

Γ5. $f(1) = \sqrt{1-1} = 0$.

$g(x) = \ln x$, $g(1) = \ln 1 = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x - e^x$, $x \in R$ και $g(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$

Δ1) α) Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $g'(x)$ **(Μονάδες 4)**

β) Να βρείτε τα σημεία όπου οι γραφικές παραστάσεις των f' και g' τέμνουν τον άξονα xx' . **(Μονάδες 4)**

Δ2) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$ και να αποδείξετε ότι η $h(x) = 0$ εξίσωση είναι αδύνατη. **(Μονάδες 5)**

Δ3) α) Να αποδείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x > 1$. **(Μονάδες 3)**

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **(Μονάδες 3)**

Δ4) α) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \leq 0$ **(Μονάδες 3)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x + g(e) = x$ για $x \leq 0$ **(Μονάδες 3)**

Δ1. α) $f(x) = x - e^x$, $x \in R$ $\quad f'(x) = 1 - e^x$, $x \in R$.

$g(x) = x \ln x$, $x > 0$ $\quad g'(x) = (x)' \ln x + x (\ln x)'$

$g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$g'(x) = \ln x + 1$, $x > 0$.

β) $x'x$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \quad (0, 0)$

$x'x$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow$

$\ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow$

$x = e^{-1} \quad \left(\frac{1}{e}, 0\right)$

Δ2. $h(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$ $\quad A = (0,1) \cup (1, +\infty)$

Διότι $x > 0$ και $x \neq 1$: $h(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $\ln x = 0 \Leftrightarrow$.

Απορ $\quad \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow$

$x = 1$ Απορ.

Δ3. α) $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \ln x > 0$.

Για $x > 1 \Rightarrow x > 0$.

Για $x > 1 \overset{\ln}{\Rightarrow} \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$.

} Άρα $g(x) > 0$ για $x > 1$.

β) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - e^x}{x \ln x} \overset{\frac{K}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 1^+} (x - e^x) \dfrac{1}{x \ln x} = (1 - e) \cdot +\infty = -\infty$

Διότι $x \ln x > 0$ για $x > 1$.

Δ4. α) Ν.Δ.Ο $f(x)<0$ για $x\leq 0$.

Για $x\leq 0$ και $e^x>0$ άρα $-e^x<0$.

Έχουμε $\begin{matrix} x\leq 0 \\ -e^x<0 \end{matrix}\Big\}\oplus$

$x-e^x<0 \Rightarrow f(x)<0$ για $x\leq 0$

β) $e^x+g(e)=x$ για $x\leq 0$ $g(e)=e$ διότι $e=e\cdot 1=e$

Άρα $e^x+e=x \Leftrightarrow$

$e=x-e^x$ αδύνατη διότι $x-e^x<0$ και $e>0$.