

ΠΡΟΤΥΠΟΣ

Εκπαιδευτικός Όμιλος

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 4/1/2022

ΘΕΜΑ Α

A1. α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό (μονάδες 4)

β. Ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (μονάδες 3)

A2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών (μονάδες 5)

A3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και πότε συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (μονάδες 2+2)

A4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \quad (\text{μονάδες 3})$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

A5. Να αποντήσετε με σωστό ή λάθος στις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2022} (f(x)g(x))$ τότε είναι ίσο με $f(2022)g(2022)$

β. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν είναι συνεχής στο $x = 0$

γ. Αν μια συνάρτηση δεν είναι 1-1 σε ένα διάστημα Δ τότε δεν είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό. (μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x - 1$ και $g(x) = ax + 2$

B1. Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$; (μονάδες 4)

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) - 1$ με $x \leq 1$ αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1} (μονάδες 6)

B3. Να λυθεί η ανίσωση $h^{1021}(x) + h^{2021}(x) - 1 \leq f^{1021}(x) + f^{2021}(x) + 1$, όπου h η συνάρτηση του ερωτήματος **B2**. (μονάδες 6)

B4. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της $\alpha(x) = -e^x$ σε μοναδικό σημείο A και εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $\beta(x) = \ln x$ στο σημείο B με τετμημένη $x_0 = 1$. (μονάδες 6)

B5. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B του ερωτήματος B4 σχηματίζουν με την αρχή αξόνων ισοσκελές τρίγωνο του οποίου να βρείτε το εμβαδόν. (μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x - e^{x+1} & , x < -1 \\ \alpha x^3 - 3x^2 - \gamma x + \beta & , -1 \leq x < 0 \\ -\eta \mu x + \gamma & , 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \text{ , με } \alpha \in (-4, -3)$$

Η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma = 1$ (μονάδες 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = -1$ (μονάδες 6)

Γ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$ και να αποδείξετε ότι σχηματίζει με τον άξονα xx' αμβλεία γωνία την οποία και να βρείτε.

(μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f'(\alpha+3)}{x} - \frac{f^2(x)}{x+1} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα

στο διάστημα $(-1, 0)$

(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 1]$ για την οποία ισχύει:

$x^2 + f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = 1$. Αν επιπλέον $g(x) = \ln x$, $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και να σχεδιάσετε την C_f (μονάδες 6)

Δ2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g(f(x) - x)$ και να βρεθεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(f(x) - x) - g(1)}{(f(x) - x) - 1} \quad (\text{μονάδες 5})$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g τέμνονται σε μοναδικό σημείο το οποίο και να βρείτε (μονάδες 4)

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [2, 3]$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0^{x_0}) = \frac{g(4) + g(e^e) + g(27)}{3} \quad (\text{μονάδες 5})$$

Δ5. Θεωρούμε συνάρτηση φ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας το σύνολο τιμών είναι το

$f(A)$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $h(x) = x^2 \varphi(x)$ είναι συνεχής στο $\xi = 0$

(μονάδες 5)

