

ΠΡΟΤΥΠΟΣ

Εκπαιδευτικός Όμιλος

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

4/1/2021

ΘΕΜΑ Α.

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών (μονάδες 6)

A2. Πότε λεμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής και πότε ασυνεχής σε ένα σημείο x_0

του πεδίου ορισμού της; (μονάδες 5)

A3. Να δώσετε ένα παράδειγμα συνάρτησης που να επαληθεύει τα παρακάτω δεδομένα και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε ως **Σωστές ή Λανθασμένες** τις παρακάτω προτάσεις

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ τότε κατ'ανάγκη θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$

β) Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν κοντά στο x_0 ισχύουν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

τότε κατ'ανάγκη δεν θα υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

γ) Αν ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$ τότε ορίζεται η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

ε) Αν μια συνάρτηση δεν είναι 1-1 σε ένα διάστημα Δ τότε δεν είναι και γνησίως μονότονη σε αυτό

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

με $f(2) = 5$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

B1. Να βρείτε το $f(5)$ (μονάδες 5)

B2. Να αποδείξετε ότι f αντιστρέφεται

(μονάδες 7)

B3. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$

(μονάδες 6)

B4. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}\left(2x^2 + 7x\right) - 1\right) = 2$

(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)}{\eta \mu x} & , x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right) \\ \alpha^2 (x+1) - 4|\alpha| + 4 & , x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$

Γ1. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

(μονάδες 5)

Αν $\alpha = 2$

Γ2. Να μελετήσετε το πρόσημο της f

(μονάδες 7)

Γ3. Να βρείτε τους πιθανούς τύπους μιας συνεχούς συνάρτησης $g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει:

$$(g(x) - f(x))(g(x) + f(x)) = 0 \quad \text{και} \quad g(1) = 4$$

(μονάδες 7)

Γ4. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $h: \left[0, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$h(x)f(x) = 4x^4 \eta \mu \frac{\pi}{x} \quad , x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f(x) + f(1-x) = 3(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με

$$g(0) = 6 - 2f(0) \quad \text{και} \quad g(1) = 4 - f(1)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2e^{2x} + e^x - e}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

(μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο

(μονάδες 6)

Δ3. Αν ισχύει ότι $e^x f(x) + e^x = e^x g(x) + 4e^{2x} - 3e$ να λυθεί η ανίσωση

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3}$$

(μονάδες 6)

Δ4. Αν θεωρήσουμε τη συνεχή συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $h(x)(h(x) + e^{1-x}) + (h(x) + e^{1-x})e^{1-x} = 4e^x(e^x + 1) + 1, x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - 2e}{x - 1} = 2e + 1$,

να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις h και f είναι ίσες

(μονάδες 7)