

ΠΡΟΤΥΠΟΣ

Εκπαιδευτικός Όμιλος

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 30/5/2021

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

α. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(μονάδες 9)

β. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της f ;

(μονάδες 3,5)

A2. α. Για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f''(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0)$.

Να αποδείξετε ότι:

(i) Η συνάρτηση $g(x) = [f(x)]^2 - [f'(x)]^2 + 2021$ είναι σταθερή

(μονάδες 3)

(ii) $g(x) = 2021$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(μονάδες 2)

β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**

(i) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $f(x) \neq 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0

(μονάδες 2)

(ii) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(2, -4)$ ανήκουν και τα δύο στη γραφική παράσταση της f .

(μονάδες 2,5)

(iii) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

(μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x - x$, $x \in [0, 2\pi]$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6)

B2. Να βρείτε τα διαστήματα της κυρτότητας της f καθώς και τα σημεία καμψής της (μονάδες 8)

B3. Να ελέγξετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την C_f (μονάδες 6)

B4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(\pi, f(\pi))$ σχηματίζει με

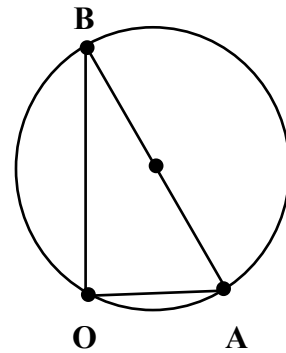
τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{\pi^2}{4}$ τ.μ.

(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ.

Θεωρούμε έναν κύκλο και $O(0,0)$ ένα σημείο του.

Αν A ένα σημείο με τετμημένη $x+1$ και $B(0, e^{-\alpha x})$ με $x > 0$ και $\alpha > 0$ ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου BOA

δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{x+1}{2e^{\alpha x}}$, $x > 0$ και να βρεθεί για ποια τιμή του $\alpha > 0$ το μέγιστο του εμβαδού παίρνει την ελάχιστη τιμή του **(μονάδες 9)**

Γ2 Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του α ώστε να ισχύει $E(x) \leq \frac{e^2}{2\alpha}$ **(μονάδες 5)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BOA δεν μπορεί να είναι ισοσκελές **(μονάδες 5)**

Γ4. Έστω ένα σημείο M που κινείται στον θετικό ημιάξονα Ox με ταχύτητα

$s'(t) = 1$ μονάδα/sec. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 1$ sec βρίσκεται στη θέση με

$s(1) = 2$ να βρείτε τη συνάρτηση θέσης του σημείου M για κάθε $t > 0$ και να

αποδείξετε ότι το M κινείται στη χορδή OA του παραπάνω κύκλου **(μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Δ.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες με:

- $g(0) = 2$
- $f(0) = \sqrt{2}$
- $g(x) = 2\sqrt{x^2 + 2x + 2} \cdot f'(x) - 2x$, $x \in \mathbb{R}$
- $|g'(x)| \leq |x - x_0|$, για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$ με $x \neq x_0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $|g(x) - g(x_0)| \leq |x - x_0|^2$ **(μονάδες 5)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή και στη συνέχεια ότι

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$ **(μονάδες 8)**

Δ3. Να βρείτε σημείο M της C_f που να απέχει από το σημείο $A(1,0)$ τη μικρότερη απόσταση. **(μονάδες 6)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon_1): y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε_1) στο $+\infty$ **(μονάδες 6)**

