πρότυπο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ
3/12/2023
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. (Μονάδες 5)

Απόδειξη Θεωρίας

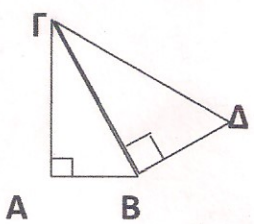
Α2. Ποια η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου; (Μονάδες 3)

Θεωρία

Α3. α. Να διατυπώσετε τα συνοπτικά κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων. (Μονάδες 4)

Θεωρία

β. Στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ έχουμε ΑΒ=ΒΔ. (ΒΓ κοινή). Είναι τα ΑΒΓ και ΒΓΔ ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)



Όχι διότι η ΒΓ κοινή πλευρά στο ένα τρίγωνο είναι υποτείνουσα και στο άλλο κάθετη πλευρά.

Α3. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

Λ α. Αν ένα τρίγωνο έχει μια οξεία γωνία τότε είναι οξυγώνιο.

Λ β. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται από οποιαδήποτε κορυφή είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας και διάμεσος της απέναντι πλευράς.

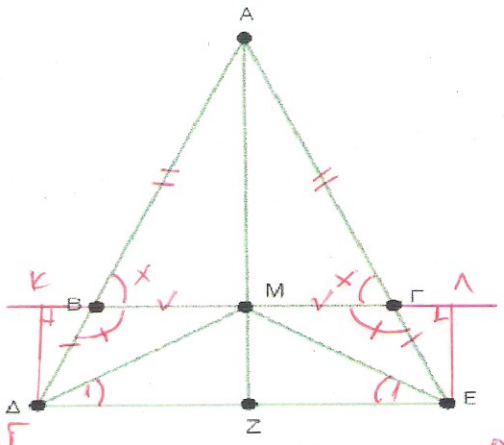
Σ γ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.

Σ δ. Ύψος σε ένα τρίγωνο είναι η απόσταση μιας κορυφής από την απέναντι πλευρά.

Λ ε. Δύο τρίγωνα με γωνίες ίσες μία προς μία είναι ίσα. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΓΕ.



Β1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

Συγκρίνω $M\hat{B}\Delta$ $M\hat{E}\Gamma$
$BM = M\Gamma$, Μ μέσο ΒΓ
$B\Delta = \Gamma E$ υπόθεση.
$\Delta\hat{B}M = E\hat{\Gamma}M$ παραπληρωματικές των $\hat{B} = \hat{\Gamma} = x$
Άρα $B\hat{M}\Delta = M\hat{E}\Gamma$ $\Rightarrow M\Delta = ME$ (1)

Β2. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ. (Μονάδες 4)

Από (1) $M\Delta = ME$ άρα $M\hat{\Delta}E$ ισοσκελές οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ δηλαδή $M\hat{\Delta}E = M\hat{E}\Delta$

Β3. Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι διαμεσος στην ΔΕ. (Μονάδες 5)

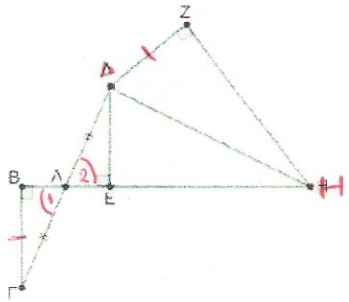
Στο $A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές, ΑΜ διάμεσος άρα και διχοτόμος της $\hat{A}$. Στο $A\hat{\Delta}E$ ισοσκελές ($A\Delta = AE$) η ΑΖ διχοτόμος της $\hat{A}$ οπότε διάμεσος της ΔΕ.

Β4. Να αποδείξετε ότι τα Δ και Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ. (Μονάδες 6)

Φέρνω ΔΚ, ΕΛ κάθετες στην προέκταση της ΒΓ.
Ν.Δ.Ο $\Delta K = E\Lambda$. Συγκρίνω $\Delta\hat{K}B$ $E\hat{\Lambda}\Gamma$ ορθογ
$B\Delta = E\Gamma$, υπόθεση.
$K\hat{B}\Delta = E\hat{\Gamma}\Lambda$ ως κατακορυφήν
της $\hat{B} = \hat{\Gamma} = x$
Άρα $\Delta\hat{K}B = E\hat{\Lambda}\Gamma \Rightarrow \Delta K = E\Lambda$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ και ΔΖΗ είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $A\hat{B}\Gamma$, $A\hat{E}\Delta$, και $\Delta\hat{Z}H$ αντίστοιχα. Επίσης ΑΓ = ΑΔ και ΒΓ = ΔΖ. Να αποδείξετε ότι:



Α. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

Συγκρίνω $A\hat{B}\Gamma$ $A\hat{\Delta}E$ ορθογ
ΑΓ = ΑΔ υπόθεση
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ κατακορυφήν
Άρα $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Delta}E \Rightarrow B\Gamma = \Delta E$ (1)

Β. Η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{H}Z$. (Μονάδες 4)

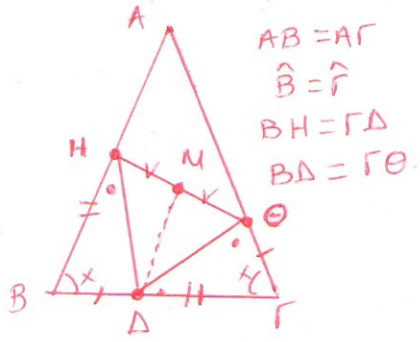
Αφού $B\Gamma = \Delta E$ } Τότε $\Delta E = \Delta Z$, το Δ ισαπέχει από τις ΗΖ και ΗΕ
και $B\Gamma = \Delta Z$ } άρα σημείο της διχοτόμου. Άρα ΗΔ διχοτόμος της $E\hat{H}Z$.

Γ2. Σε ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ (ΑΒ=ΑΓ) θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της ΒΓ. Στις ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Η και Θ αντίστοιχα ώστε ΒΗ=ΔΓ και ΓΘ=ΒΔ.

Α. Ν.Δ.Ο. το τρίγωνο $\Delta\hat{H}\Theta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

Β. Είναι οι γωνίες $B\hat{H}\Delta$ και $\Delta\hat{\Theta}\Gamma$ ίσες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

Γ. Αν Μ μέσο ΗΘ ν.δ.ο. η ΔΜ είναι ύψος του τριγώνου $\Delta\hat{H}\Theta$. (Μονάδες 4)

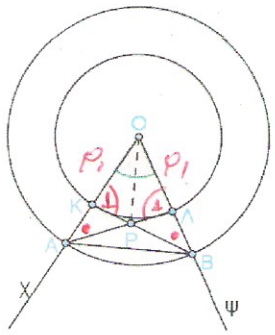


Α. Ν.Δ.Ο. ΔΗ = ΔΘ
Συγκρίνω $B\hat{\Delta}H$ $\Gamma\hat{\Delta}\Theta$
ΒΔ = ΓΘ υπόθεση
ΒΗ = ΓΔ υπόθεση
$\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ΑΒΓ ισοσκελές
Άρα $B\hat{\Delta}H = \Gamma\hat{\Delta}\Theta \Rightarrow \Delta H = \Delta\Theta \Rightarrow$
$\Delta\hat{H}\Theta$ ισοσκελές

Β. $B\hat{H}\Delta$ και $\Delta\hat{\Theta}\Gamma$ γωνίες δεν είναι ίσες διότι δεν βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές.

Γ. Το $\Delta\hat{H}\Theta$ ισοσκελές, ΔΗ = ΔΘ, ΔΜ διάμεσος άρα και ύψος.

ΘΕΜΑ Δ



Δίνεται οξεία γωνία xOψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,ρ_1) και (O,ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία Κ,Α και την Oψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $A\Lambda = BK$ (Μονάδες 7)

Δ2. Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ,ΒΚ. (Μονάδες 7)

Δ3. Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}\psi$. (Μονάδες 7)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ΑΡ είναι μεσοκάθετος στην ΑΒ.

(Μονάδες 4)

Δ1. Συγκρίνω $\Delta A\hat{\Lambda}O$ $\Delta B\hat{K}O$

$O\Lambda = OK$ ακτίνες ρ_1

$OA = OB$ ακτίνες ρ_2

$\hat{O} = \hat{O}$ (κοινή)

$\Rightarrow A\hat{\Lambda}O = B\hat{K}O$

$\Rightarrow AA = AK$ (1)

$\hat{\Lambda}_1 = \hat{K}_1$ (2)

$O\hat{A}\Lambda = O\hat{B}K$ (3)

Δ2. Ν.Δ.Ο. $PA = PB$

Συγκρίνω $\Delta K\hat{P}A$ $\Delta\Lambda\hat{P}B$

$KA = \Lambda B$ Διαφορά $\rho_2 - \rho_1$

$O\hat{A}\Lambda = O\hat{B}K$ από (3)

$A\hat{K}P = B\hat{\Lambda}P$ ως παραπληρωματικές των $\hat{\Lambda}_1$ και $\hat{K}_1$ ίσες

$\Rightarrow K\hat{P}A = \Lambda\hat{P}B$

$\Rightarrow PA = PB$ (4)

$P\hat{A}B$ ισοσκελές

Δ3. Συγκρίνω $O\hat{P}A$ $O\hat{P}B$

$OP = OP$

$OA = OB = \rho_2$,

$PA = PB$ από (4)

$\Rightarrow O\hat{P}A = O\hat{P}B \Rightarrow$

$A\hat{O}P = B\hat{O}P \Rightarrow$

ΟΡ διχοτόμος.

Δ4. $O\hat{A}B$ ισοσκελές, $OA = OB = \rho_2$, ΟΡ διχοτόμος και $\hat{O}$ άρα διάμεσος και ύψος στην ΑΒ.

Άρα ΟΡ μεσοκάθετος στην ΑΒ.