

ΠΕΘΥΜΠΟ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
19/11/2023
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

Θεωρία

Μονάδες: 4

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Θεωρία

Μονάδες: 3

A3. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο; Μονάδες: 3

Θεωρία

A4. Πότε μια συνάρτηση λέγεται άρτια και πότε περιπτή; Πως αναγνωρίζουμε μια περιπτή συνάρτηση, από την γραφική της παράσταση;

Θεωρία

Μονάδες: (4+1)

A5. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

- ↗ α. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$, παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό α και β .
- ↗ β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ είναι ίδια με την γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) - 5$, αλλά μετατοπισμένη 5 μονάδες κατακόρυφα προς τα πάνω.
- ↖ γ. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των τεταγμένων.
- ↖ δ. Αν οι ευθείες δύο γραμμικών εξισώσεων είναι παράλληλες τότε το σύστημα τους έχει μοναδική λύση.
- ↖ ε. Η εξίσωση $2x + y + 3 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 2. Μονάδες: 10

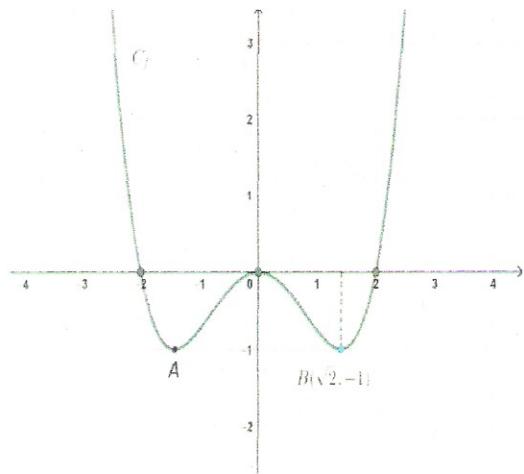
ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f
 B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της
 f .
 Μονάδες: 4

$$Af = \mathbb{R} \quad f(A) = [-1, +\infty)$$

B2. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.
 Μονάδες: 3

Για κάθε $x \in Af$ ισχύει $-x \in Af$ και έχει
 ίσα σημεία στην γραφική.



B3. Να βρεθεί το $f(-\sqrt{2})$.
 Μονάδες: 3

$$B(\sqrt{2}, -1) : f(\sqrt{2}) = -1 \text{ και } f \text{ άριθμος: } f(-x) = f(x)$$

$$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -1 \quad \text{Άρα } f(-\sqrt{2}) = -1$$

B4. Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A(-\sqrt{2}, -1)$ και $B(\sqrt{2}, -1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{2023}{2024}\right)$ και $f(1)$.
 Μονάδες: (4+3)

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -\sqrt{2}] &\text{ η } f \text{ γρ. φθίνουσα} \\ x \in [-\sqrt{2}, 0] &\text{ η } f \text{ γρ. αύξουσα} \\ x \in [0, \sqrt{2}] &\text{ η } f \text{ γρ. φθίνουσα} \\ x \in [\sqrt{2}, +\infty) &\text{ η } f \text{ γρ. αύξουσα} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Οι αριθμοί } \frac{2023}{2024} &\text{ και } 1 \\ \text{ανήκουν στο } [0, \sqrt{2}] \\ \frac{2023}{2024} < 1 \implies f\left(\frac{2023}{2024}\right) &> f(1) \end{aligned}$$

B5. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f .
 Μονάδες: 4

Σας θέλεις $x = -\sqrt{2}$ και $x = \sqrt{2}$ η f έχει ένα κάτιο

$$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -1$$

Μέχιστο Δεν έχει

B6. Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$ και την ανίσωση $f(x) > 0$. Μονάδες: 4

Σημεία τοπίσης
 με x

$$x = -2 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 2$$

f πάνω από x

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa + \lambda x - \sqrt{x}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(4,-5)$ να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες: 6

$$\begin{aligned} A(1,2): f(1) = 2 &\Rightarrow \kappa + \lambda - 1 = 2 \Rightarrow \kappa + \lambda = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} (-1) \\ \kappa + \lambda = 3 \end{array} \right. \\ B(4,-5): f(4) = -5 &\Rightarrow \kappa + 4\lambda - 2 = -5 \Rightarrow \kappa + 4\lambda = -3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{④} \\ \kappa + 4\lambda = -3 \end{array} \right. \\ & \underline{\kappa + 4\lambda = -3} \\ & 3\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -2 \end{aligned}$$

$$\lambda = -2 \quad \kappa - 2 = 3 \Rightarrow \kappa = 5$$

Γ2. Για $\kappa = 5$ και $\lambda = -2$ $f(x) = 5 - 2x - \sqrt{x}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες: 1

$$\text{Πρέπει } x > 0 \quad A = [0, +\infty)$$

B. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες: 5

$$\begin{aligned} \text{Έσω } x_1, x_2 \in A_f \text{ με } x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{④} \\ \kappa + 4\lambda = -3 \end{array} \right. \\ x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow 5 - 2x_1 > 5 - 2x_2 \\ 5 - 2x_1 - \sqrt{x_1} > 5 - 2x_2 - \sqrt{x_2} \\ f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα f στ. φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Γ. Να εξετάσετε αν η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων ή άξονα συμμετρίας το άξονα y' .

Μονάδες: 2

Αφού $x \in A_f$ και $-x \notin A_f$ τότε δεν είναι ούτε άριστα ούτε ηερίσκη.

Δ. Με τη βοήθεια του πεδίου ορισμού να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$ και να βρείτε την μέγιστη τιμή της.

Μονάδες: 4

$$\begin{aligned} \text{Μεγιστο } \text{στο } x=0: f(x) \leq f(0) \Rightarrow & \quad \text{η } x \geq 0 \xrightarrow{f' >} f(x) \leq f(0) \\ 5 - 2x - \sqrt{x} \leq 5 \Rightarrow & \quad \frac{f(x) \leq f(0)}{f'(x) \leq 0} \\ -2x - \sqrt{x} \leq 0 \quad \text{ισχύει} & \quad \text{Μεγιστο } \text{στο } f(0)=5 \\ \text{διορ } x \geq 0 & \end{aligned}$$

E. Να λύσετε την ανίσωση $f(|x+1|) \leq 2$

Μονάδες: 4

$$\begin{aligned} f(|x+1|) \leq 2 &\Leftrightarrow f(|x+1|) \leq f(1) \xrightarrow{f' <} \\ |x+1| \geq 1 &\Leftrightarrow x+1 \leq -1 \quad \text{η } x+1 \geq 1 \\ x \leq -2 &\quad \text{η } x > 0. \end{aligned}$$

ΣΤ. Αν $\alpha, \beta \in A_f$ να αποδείξετε ότι $f(\alpha) + f(\beta) \leq 10$

Μονάδες: 3

Η f έχει μέγιστο στο $f(0)=5$ Άρα $f(x) \leq 5$

$$\begin{aligned} \alpha \in A_f: f(\alpha) \leq 5 &\quad \left\{ \begin{array}{l} f(\alpha) + f(\beta) \leq 10 \\ f(\beta) \leq 5 \end{array} \right. \\ \beta \in A_f & \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + c$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.

Δ1. Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, να βρείτε τα α, β, γ .
Μονάδες: 7

$$\begin{aligned} A(2,0) : f(2)=0 &\Rightarrow 4\alpha + 2\beta + c = 0 \\ B(-2,0) : f(-2)=0 &\Rightarrow 4\alpha - 2\beta + c = 0 \\ \Gamma(0,-2) : f(0)=-2 &\Rightarrow c = -2 \end{aligned}$$

$$4\alpha + 2\beta = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. \quad \text{①}$$

$$4\alpha - 2\beta = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

$$\frac{8\alpha = 4}{8\alpha = 4} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{&} \quad \begin{aligned} 4\alpha + 2\beta = 2 \\ 2 + 2\beta = 2 \end{aligned}$$

$$\beta = 0$$

$$\text{Άρα } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0, c = -2$$

Δ2. Αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0, c = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

συντεταγμένες των κοινών σημείων ευθείας και της παραβολής.

Μονάδες: 7

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2 = -x + 2 \quad \xrightarrow{\text{Επηλ.}} x^2 - 4 = -2x + 4 \quad \Rightarrow \\ x^2 + 2x - 8 = 0 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Για } x=2 \quad g(2) = -2+2=0 \quad (2,0) \rightarrow A \\ \Delta = 36 \\ x = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases} \end{array} \right. \\ x = -4 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Για } x=-4 \quad g(-4) = 4+2=6 \quad (-4,6) \rightarrow \Delta \end{array} \right. \end{aligned}$$

Δ3. Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
Μονάδες: 7

$$\text{Τότε } f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 + 4,5 = \frac{1}{2}x^2 + 2,5$$

$$\begin{aligned} f_1(x) = g(x) &\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2,5 = -x + 2 \quad \text{Επηλ.} \\ x^2 + 5 = -2x + 4 &\Rightarrow \\ x^2 + 2x + 1 = 0 &\quad (\Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1) \end{aligned}$$

$$g(-1) = 1+2=3 \quad \text{κοινό σημείο } K(-1,3)$$

Δ4. Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$ και την ανίσωση $f(x) < g(x)$. Μονάδες: 4

$$x = -4 \text{ &} x = 2 \quad x \in (-4, 0)$$

