

ΠΕΘΤΥΠΟ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
19/03/2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .

ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ.88

(Μονάδες: 5)

A2. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι σε κάθε ορθογώνιο είναι ίσες. (Μονάδες: 5)

ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ.106

A3. Να γράψετε τον ορισμό του ορθογωνίου. Να αναφέρετε τις επιπλέον ιδιότητες που έχει ένα ορθογώνιο από ένα τυχαίο παραλληλόγραμμο.

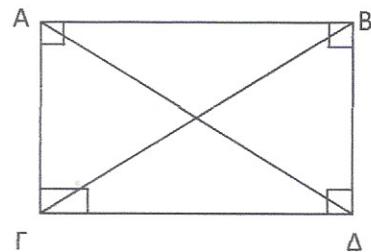
(Να γίνει σχήμα) (Μονάδες: 5)

Ορισμός: Ορθογώνιο ονομάζεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή.

Ιδιότητες ορθογωνίου παραλληλογράμμου

1. Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.

2. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.



A4. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

α. Οι διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του.

β. Ένα παραλληλόγραμμο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο.

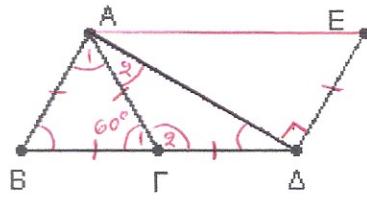
γ. Δύο διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.

δ. Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες τότε είναι παραλληλόγραμμο.

ε. Αν σε τρίγωνο ABC η $\hat{A} = 70^\circ$ τότε η \hat{B} μπορεί να είναι 80° . (Μονάδες: 10)

ΘΕΜΑ Β

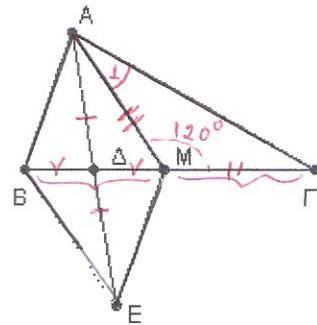
B1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην $A\Delta$ στο σημείο της Δ , τέτοιο, ώστε $\Delta E = B\Gamma$. (A και E στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη $B\Delta$).



- A. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$. (Μονάδες: 6)
 B. Να αποδείξετε ότι το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες: 6)

A. $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$: ο σòπλευρο ḡρα $\hat{A}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$
 Αφού $\Gamma\Delta = B\Gamma$ τòς ε $A\hat{B}\hat{\Gamma}$ ισοσυνταξι διάδικτη $A\Gamma = \Gamma\Delta$, ḡρα $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}$.
 Η $\hat{\Gamma}_1$ εξινερική σω $A\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$: $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta} \Rightarrow \hat{\Delta}_2 = 30^\circ = \hat{\Delta}$
 ḡρα $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$.
 B. Αφού $\Delta E = B\Gamma \Rightarrow \Delta E = AB$ και $\Delta E \parallel AB$ ως κάθετες
 συνταξι $A\Delta$. Άρα το $AB\Delta E$ παρ/κο αφού $AB \parallel \Delta E$.

B2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκταση της ώστε $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:



- A. Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.
 (Μονάδες: 4)
 B. $ME = MG$.
 (Μονάδες: 4)

Γ. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABM , ως προς τις πλευρές, ώστε το τετράπλευρο $ABEM$ να είναι ρόμβος και να δείξετε ότι η AB είναι κάθετη στην $A\Gamma$.
 (Μονάδες: 5)

A. Αφού $A\Delta = \Delta E$ η θέσην και $B\Delta = \Delta M$ ($A\Delta$ διάμεσος)
 τòς ε $ABEM$ παρ/κο διάδικτη σι διαγώνιοι διχοτομούνται.
 B. Το $ABED$ παρ/κο οπòς $AB = ME$.
 Αφού $B\Gamma = 2AB$ και μέσο BG τòς $AB = BM = MG$.
 Άρα $AB = ME = MG$.

C. Αν $ABED$ φόμβος τòς $AB = AM = BM$ οπòς ABM ισόπλευρο.
 Άρα $B\hat{A}\hat{M} = 60^\circ$ και $\hat{A}_1 = 30^\circ$ αφού $A\hat{M}\hat{G}$ ισοσυνταξι με $A\hat{M}\hat{G} = 120^\circ$
 Άρα $B\hat{A}\hat{G} = 90^\circ$ δηλαδή $B\hat{A}\perp\hat{A}\Gamma$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG ($AB=AG$). Προεκτείνουμε την AG κατά τμήμα $GZ=AG$ και την BG κατά τμήμα $\Gamma\Delta=BG$.

Γ1. Να δείξετε ότι το $\Delta\Delta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες: 4)

Κατόπιν φέρνουμε από A παράλληλη προς την BG και από το Δ παράλληλη προς την AB που τέμνονται στο E .

Γ2. Να δείξετε ότι το $\Delta\Delta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες: 4)

Γ3. Να δείξετε ότι τα σημεία E, Δ, Z είναι συνευθειακά. (Μονάδες: 4)

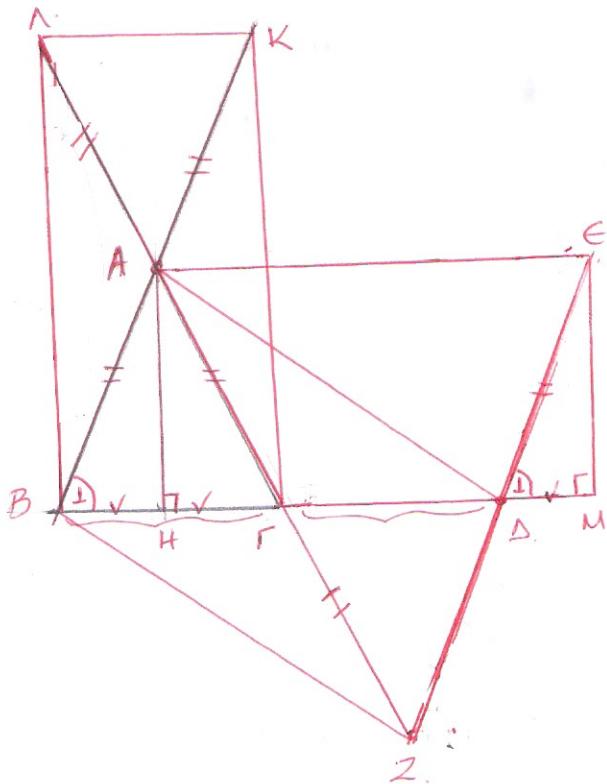
Προεκτείνουμε τις BA και GA κατά $AK=AB$ και $AL=AG$ αντίστοιχα.

Γ4. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Lambda K\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες: 4)

Αν H το μέσο της BG και στην προέκταση της $B\Delta$ πάρουμε τμήμα $\Delta M=BH$ τότε:

Γ5. Να δείξετε ότι τα τρίγωνά ABH και ΔME είναι ίσα. (Μονάδες: 5)

Γ6. Να δείξετε $AHME$ ορθογώνιο. (Μονάδες: 4)



Γ1. Αφού $AG=GZ$ και $BG=\Gamma\Delta$ είσει
ζε $ABZ\Delta$ παρ/μο διὰ τα οι διαγώνιοι
διχοσφεύγουν.

Γ2. Αφού $AE||BD$ και $\Delta E||AB$ είσει
ζε $ABDE$ παρ/μο διὰ τα οι ανέγαντα
πλευρές είναι παράλληλες.

Γ3. Το $ABDE$ παρ/μο ἀρα $\Delta E||AB$
Το $ABZ\Delta$ παρ/μο ἀρα $\Delta Z||AB$
Ἀρι Z, Δ, E συνευθειανά.

Γ4. Αφού οι διαγώνιοι BK και GL .
διχοσφεύγουν ($AB=AK$, $AG=AL$) και
είναι ίσες ($AB+AK=AG+AL$) είσει
ζε $B\Lambda K\Gamma$ ορθογώνιο.

Γ5. Στο ABG ισομείας AH διήμετρος ωντιν BG ἀρα και ίψος.
Συγκρίνω ΔABH $\Delta M\Gamma E$
 $AB=\Delta E$, $AH=\Delta M$
 $BH=\Delta M$,
 $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$,
ΑΒΕΔ παρ/μο.
ηπόθετη.
ως ενδός εγίστω και
επι ε' αυτα $AB||\Delta E$.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABH = \Delta M\Gamma E \Rightarrow \\ AH = EM. \text{①} \\ \hat{A} = \hat{M} = 90^\circ \end{array} \right\}$$

Γ6. Αφού $AH=EM$ λόγω ① και $AH||EM$ ως ικανότερες ωντιν BM .
είσει ζε $AHME$ παρ/μο με $\hat{A}=90^\circ$ ἀρα ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ Δ

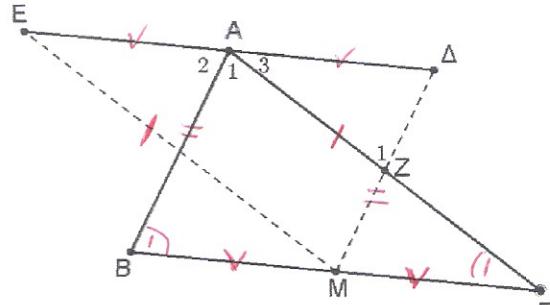
Δ1. Δίνεται τρίγωνο ABG . Από το μέσο M του BG φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα MD ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το GA (τα σημεία D και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το BG και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

A. $AD=AE$ (Μονάδες: 5)

B. Τα σημεία D, A, E είναι συνευθειακά. (Μονάδες: 5)

Γ. Η περίμετρος του τριγώνου MDE είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ABG .

(Μονάδες: 3)



A. Το $ADMB$ παρ/μο διότι $MD \parallel BA$. Άρα $AD = BM$.
Το $AEMG$ παρ/μο διότι $ME \parallel AG$. Άρα $AE = MG$.
Το μέσο των BG οπότε $MB = MG$ άρα και $AD = AE$.

B. Το $ADMB$ παρ/μο οπότε $AD \parallel BM \Rightarrow AD \parallel BG$.
Το $AEMG$ παρ/μο οπότε $AE \parallel MG \Rightarrow AE \parallel BG$.
Άρα E, A, D συνευθειακά.

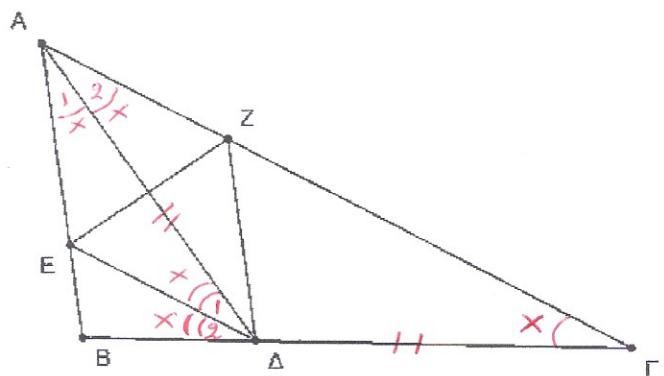
η $\hat{A}_2 = \hat{B}_1$ ως ενώς εναγγάσ } $\hat{A}_3 = \hat{G}_1$ ως ενώς εναγγάσ } Τότε $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{G}_1 = 180^\circ$ (\hat{ABG})
Άρα E, A, D συνευθειακά.

Γ. $\Pi_{MDE} = MD + ME + DE = AB + AG + BG = \Pi_{ABG}$.

$$\left. \begin{array}{l} MD = AB \text{ γηώθεση} \\ ME = AG \text{ γηώθεση} \\ DE = DA + AE = MB + MG = BG \end{array} \right\}$$

Δ2. Έστω τρίγωνο ABG και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει ότι $A\Delta = \Delta\Gamma$. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η ΔZ παράλληλη στην AB . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα $E\Delta$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλα. (Μονάδες: 4)
- β) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες: 4)
- γ) Τα τμήματα $A\Delta$ και EZ διχοτομούνται. (Μονάδες: 4)



$$\text{α) } N\Delta O \in \hat{\Delta}B = \hat{\Gamma}$$

Το $\overset{\Delta}{AD}\Gamma$ ισοσυνέαται, $\Delta A = \Delta\Gamma$, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = x$ αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = x$ (AD διχοτόμος).

Η $\overset{\Delta}{ADB}$ είναι εξωτερική ως $\overset{\Delta}{AD}\Gamma$ οπότε: $\overset{\Delta}{ADB} = \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$
 $\overset{\Delta}{ADB} = 2x$, όμως ΔE διχοτόμος της $\overset{\Delta}{ADB}$ οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = x$$

Τούτε $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = x$ ως ερώτησης και επι ταύτα σαν
ενθεώντες ΔE και $A\Gamma$ με εξήνουσα την BG .

Άρα $\Delta E||A\Gamma$:

β) Στο $\overset{\Delta}{EAD}$ είχουμε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = x$ οπότε ισοσυνέαται
με $\Delta E = AE$

γ) Αφού $\Delta E||A\Gamma \Rightarrow \Delta E||AZ$ και $\Delta Z||AE$ τότε είναι
ΑΕΔΖ παράλληλο οπότε οι διαγώνιοι AD και EZ
Θα διχοτομούνται.