

ΠΕΘΤΥΠΟ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
27/11/2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει:

α. $\eta \mu^2 \omega + \sigma v^2 \omega = 1$. β. $\varepsilon \varphi \omega = \frac{\eta \mu \omega}{\sigma v \omega}$ με $\sigma v \omega \neq 0$ και $\sigma \varphi \omega = \frac{\sigma v \omega}{\eta \mu \omega}$ με $\eta \mu \omega \neq 0$

An. Σx. Βιβλίου Σελ 60 - 61

Μονάδες: (4+1+1)

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες: 3

Σx. Βιβλ Σελ 31

A3. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ελάχιστο; Μονάδες: 3

Σx. Βιβλ Σελ 33

A4. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέγεται περιττή;

Τι είδους συμμετρία παρουσιάζει;

Μονάδες: 3

Σx. Βιβλίου Σελ 36

A4. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $\eta \mu \omega = 1$, τότε υποχρεωτικά θα είναι $\sigma v \omega = 0$ Σ

β. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in A$

ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$ Σ

γ. Ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων έχει πάντα μοναδική λύση. Λ

δ. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Σ

ε. Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + c$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \Sigma$$

Μονάδες: 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) του διπλανού σχήματος.

B1. Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο ευθειών. Μονάδες: 6

Αν η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $3x - y = 4$

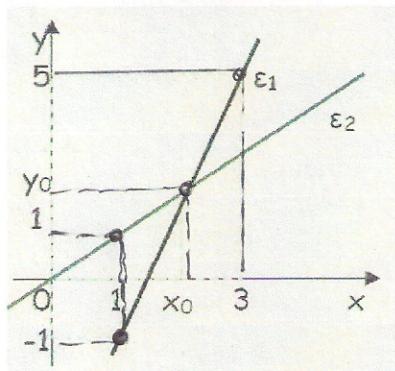
B2. Να βρείτε τις συντεταγμένες (x_0, y_0) του σημείου τομής των δύο ευθειών. Μονάδες: 5

$$\text{B3. Δίνεται το σύστημα } (\Sigma_1): \begin{cases} \frac{2x-3}{2} + \frac{y-1}{3} = \frac{x+y+1}{6} \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

Να λύσετε το σύστημα (Σ_1) . Μονάδες: 6

B4. Αν $(x_0, y_0) = (2, 2)$ η λύση του συστήματος (Σ_1) να λύσετε το σύστημα

$$(\Sigma_2): \begin{cases} \frac{x_0x}{2} + \frac{y_0y}{2} = 5 \\ x_0x^2 + y_0y^2 = 3x_0^2 + 2y_0^2 + 6 \end{cases}$$



Μονάδες: 8

$$\text{B1 } \varepsilon_1: \Delta \text{έρχεται } (1, -1), (3, 5) \text{, να } y = ax + b \\ (1, -1): -1 = a + b \Rightarrow a + b = -1 \quad (1) \\ (3, 5): 5 = a \cdot 3 + b \Rightarrow 3a + b = 5 \quad (2) \\ \begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -a - b = 1 \\ 3a + b = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \oplus \\ 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{array} \quad b = -4$$

$$\text{Από } \varepsilon_1: y = 3x - 4 \quad \text{et} \quad 3x - y = 4$$

$$\varepsilon_2: \Delta \text{έρχεται } (0, 0) \text{ να } (1, 1) \text{ οπότε } y = ax \\ (1, 1): 1 = a \cdot 1 \Rightarrow a = 1 \quad \text{Από } \varepsilon_2: y = x.$$

B2: (x_0, y_0) σημείο τοποθέτησης των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οπότε αύτην τη σύναυλια.

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = x \end{cases} \quad 3x - 4 = x \Rightarrow 3x - x = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2, \\ \text{να } y = 2.$$

$$\text{Από } (x_0, y_0) = (2, 2)$$

$$\text{B3. } \begin{cases} \frac{2x-3}{2} + \frac{y-1}{3} = \frac{x+y+1}{6} \\ 3x - y = 4 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Εκn=6} \\ \Rightarrow 3(2x-3) + 2(y-1) = x+y+1 \\ 6x - 9 + 2y - 2 = x+y+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y = 12 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \oplus \\ 8x = 16 \Rightarrow x = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \cdot 2 - y = 4 \\ y = 2 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5x + y = 12 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \oplus \\ 8x = 16 \Rightarrow x = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \cdot 2 - y = 4 \\ y = 2 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\text{Άνω } (x_0, y_0) = (2, 2)$$

$$\text{B4. } \begin{cases} \frac{2x}{2} + \frac{2y}{2} = 5 \\ 2x^2 + 2y^2 = 12 + 8 + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 5 \\ 2x^2 + 2y^2 = 26 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5-x \\ x^2 + (5-x)^2 = 13 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 5-x \\ x^2 + 25 - 10x + x^2 = 13 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 6 = 0 \end{array} \Rightarrow x = 2 \quad \begin{array}{l} \text{et} \\ \text{οπότε } y = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array} \quad (2, 3) \quad (3, 2)$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το σύστημα (Σ): $\begin{cases} 3\sin x - \eta \mu y = 2 \\ 3\sin x + \eta \mu y = 1 \end{cases}$ με $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$

Γ1. να αποδείξετε ότι: $\sin x = \frac{1}{2}$. και $\eta \mu y = -\frac{1}{2}$.

Μονάδες: 4

Γ2. να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

Μονάδες: 6

Γ3. Αν $\sin x = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\eta \mu x \cdot \sin x + \epsilon \varphi x}{\eta \mu x + \sigma \varphi x}$

Μονάδες: 5

Γ4. α. Να δείξετε ότι $\frac{\sigma \varphi \alpha - \epsilon \varphi \alpha}{\sigma \varphi \alpha + \epsilon \varphi \alpha} = 1 - 2\eta \mu^2 \alpha$

Μονάδες: 7

β. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\sigma \varphi y - \epsilon \varphi y}{\sigma \varphi y + \epsilon \varphi y}$

Μονάδες: 3

Γ1. $\begin{cases} 3\sin x - \eta \mu y = 2 \\ 3\sin x + \eta \mu y = 1 \end{cases} \quad \textcircled{+}$

$\underline{3\sin x + \eta \mu y = 1}$

$6\sin x = 3 \Rightarrow \sin x = \frac{3}{6} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

Άρα $3\frac{1}{2} + \eta \mu y = 1 \Rightarrow \eta \mu y = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow \eta \mu y = -\frac{1}{2}$.

Γ2. $\eta \mu^2 x + \omega^2 x = 1 \Rightarrow \eta \mu^2 x = 1 - \omega^2 x = 1 - (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Άρα $\eta \mu x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Όμως $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta \mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\epsilon \varphi x = \frac{\eta \mu x}{\sin x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \epsilon \varphi x = \sqrt{3}$ ή $\epsilon \varphi x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Γ3. $A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{4}}{\frac{9\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{5\sqrt{3}}{6}} = \frac{6 \cdot 5\sqrt{3}}{4 \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$A = \frac{3}{2}$.

Γ4. a) $\frac{\sigma \varphi \alpha - \epsilon \varphi \alpha}{\sigma \varphi \alpha + \epsilon \varphi \alpha} = \frac{\frac{\omega \alpha}{\eta \mu \alpha} - \frac{\eta \mu \alpha}{\omega \alpha}}{\frac{\omega \alpha}{\eta \mu \alpha} + \frac{\eta \mu \alpha}{\omega \alpha}} = \frac{\frac{\omega \alpha^2 - \eta \mu^2 \alpha^2}{\eta \mu \alpha \cdot \omega \alpha}}{\frac{\omega^2 \alpha + \eta \mu^2 \alpha}{\eta \mu \alpha \cdot \omega \alpha}} = \frac{\omega^2 \alpha - \eta \mu^2 \alpha}{\omega^2 \alpha + \eta \mu^2 \alpha} =$

$= \omega^2 \alpha - \eta \mu^2 \alpha = 1 - \eta \mu^2 \alpha - \eta \mu^2 \alpha = 1 - 2\eta \mu^2 \alpha.$

b) $\Pi = \frac{\sigma \varphi y - \epsilon \varphi y}{\sigma \varphi y + \epsilon \varphi y} \stackrel{\text{a)}}{=} 1 - 2\eta \mu^2 y = 1 - 2(-\frac{1}{2})^2 = 1 - 2 \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Άρα $\Pi = \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x$, με $\alpha \in \mathbb{R}$ και η παραβολή $g(x) = -3x^2 + \beta$ με $\beta \in \mathbb{R}$.

Δ1. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, -4)$ και η γραφική παράσταση της g έχει κορυφή $K(0, 1)$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Μονάδες: 4

Δ2. Για $\alpha = 3$ και $\beta = 1$

A. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ και $f\left(\frac{3}{2}\right)$ Μονάδες: 6

B. Να δείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και η C_g έχει άξονα συμμετρίας το άξονα $y=y$. Μονάδες: 4

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$ και να βρείτε την μέγιστη τιμή της. Μονάδες: 4

Δ3. Για $\alpha = 3$ και $\beta = 1$

Να βρείτε την συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ και Μονάδες: 1

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (x-1)^3 + 2$ Μονάδες: 3

ii) αν $h(x) = x^3$ να βρείτε την οριζόντια και την κατακόρυφη μετατόπιση της h ώστε να συμπέσει με την C_φ Μονάδες: 3

$$\Delta 1. C_f: A(-1, -4) \quad f(-1) = -4 \Rightarrow (-1)^3 + \alpha(-1) = -4 \Leftrightarrow -1 - \alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = +3.$$

$$\text{Άρα } f(x) = x^3 + 3x, \quad Af = \mathbb{R}$$

$$C_g \ K(0, 1): \quad g(0) = 1 \Rightarrow -3 \cdot 0^2 + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

$$\text{Άρα } g(x) = -3x^2 + 1, \quad Ag = \mathbb{R}$$

$$\Delta 2. \text{ a) } \text{Έσοντας } x_1, x_2 \in Af \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 < x_2^3 \\ \text{και } 3x_1 < 3x_2 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \text{ (1)} \\ x_1^3 + 3x_1 < x_2^3 + 3x_2 \\ f(x_1) < f(x_2), \quad \text{λόγω της αύξουσας φύσης της } f.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{3}{2}\right).$$

$$\text{b) } C_f: \quad x \in Af, -x \in Af \quad f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -f(x) \\ f \text{ ηεριτική και έχει οπική επιφέρωση στο } (0, 0)$$

$$C_g: \quad x \in Ag, -x \in Ag \quad g(-x) = -3(-x)^2 + 1 = -3x^2 + 1 = g(x) \\ g \text{ άριστη και έχει άξονα οπικής επιφέρωσης στην } y-y.$$

8) N.D.O $g(x) \leq g(0)$

korw $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow -3x^2 + 1 \leq 0 + 1 \Leftrightarrow -3x^2 \leq 0$ ioxjel.

Apa n g $\exists x \in \mathbb{R}$ jow $x=0$ zo $g(0)=1$.

$$\Delta 3. Q(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 3x - 3x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$\text{i)} Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = \underbrace{x^3 - 3x^2}_{\text{Meracóniom}} + \underbrace{3x + 1}_{\text{1 morada desia.}}$$

$$Q(x) = (x-1)^3 + 2$$

ii) $h(x) = x^3$ Meracóniom: 2 morades nàrv.,
1 morada desia.