

Λύσεις Γεωμετρίας Α' Λυκείου
30/11/2014

ΘΕΜΑ Α

<u>A3</u>	Ορθ. 6καλ.		Οξ. 6καλ.	
	Ορθ. 1606κ.		Οξ. 1606κ.	
	Ορθ. 160πλ.	—	Οξ. 160πλ.	
	Αμβλ. 6καλ.			
	Αμβλ. 1606κ.			
	Αμβλ. 160πλ.	—		

A4 1). Σ 2). Σ 3). Σ 4). Λ 5). Σ

ΘΕΜΑ Β

B1 Συγκρ. τα ορθ. τριγ. $\triangle B\hat{A}D$ και $\triangle B\hat{D}E$ τα οποία έχουν:

- 1). $\hat{A}B\hat{D} = \hat{D}B\hat{E} = \omega \implies \triangle B\hat{A}D = \triangle B\hat{D}E$
 2). BD κοινή

B2

- α). $AB < B\Gamma$ (υποκείμενα σε ορθογώνιο τριγ.)
 β). $AD = DE$ (λόγω $\triangle B\hat{A}D = \triangle B\hat{D}E$)
 γ). $\hat{B} = 2\omega > \omega = \hat{\Gamma} \iff A\Gamma > AB$
 δ). $AD = DE$ και $DE < D\Gamma$ (υποκείμενα στο ορθ. τριγ. $\triangle \hat{D}E\Gamma$)
 οπότε $AD < D\Gamma$.
 ε). $D\Gamma = BD$ ($\hat{D}B\hat{E} = \hat{\Gamma} = \omega$ οπότε $\triangle B\hat{D}\Gamma$ ισοσκελές)

B3 Συγκρ. τα ορθ. τριγ. $\triangle \hat{D}A\hat{Z}$ και $\triangle \hat{D}E\hat{\Gamma}$ τα οποία έχουν:

- 1). $AD = DE$ (από B2)
 2). $\hat{A}\hat{D}\hat{Z} = \hat{E}\hat{D}\hat{\Gamma}$ (ως κατακορυφήν) $\implies \triangle \hat{D}A\hat{Z} = \triangle \hat{D}E\hat{\Gamma}$

B4

$\triangle \hat{D}A\hat{Z} = \triangle \hat{D}E\hat{\Gamma}$ οπότε $AZ = E\Gamma$
 $\triangle B\hat{A}D = \triangle B\hat{D}E$ οπότε $AB = BE$ $\implies BZ = B\Gamma$ (ως άθροισμα ίσων πλ.)

οπότε το $\triangle B\hat{Z}\hat{\Gamma}$ ισοβκ. Η BD είναι διχοτόμος οπότε και ύψος και διαμέσος στο $\triangle B\hat{Z}\hat{\Gamma}$ άρα και μέσοκάθετος του $Z\Gamma$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁ Συγκρ. τα τριγ. $\triangle B\hat{A}\Theta$ και $\triangle \hat{A}ZK$ τα οποία έχουν:

1). $B\hat{A}\Theta = \hat{A}ZK$ (ως ακτίρες)

2). $B\hat{A}\Theta = \hat{A}ZK$ (- || -)

3). $B\hat{A}\Theta = \hat{A}ZK$ (ως κατακορυφήν)

$$\left. \begin{array}{l} \text{1) } B\hat{A}\Theta = \hat{A}ZK \\ \text{2) } B\hat{A}\Theta = \hat{A}ZK \\ \text{3) } B\hat{A}\Theta = \hat{A}ZK \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{π-Γ-π} \\ \text{π-Γ-π} \end{array} \Rightarrow \triangle B\hat{A}\Theta = \triangle \hat{A}ZK$$

Γ₂ Συγκρ. τα τριγ. $\triangle B\hat{A}\Delta$ και $\triangle \hat{A}\Gamma E$ τα οποία έχουν:

1). $AB = \Gamma E$ (δεδ.)

2). $B\hat{A}\Delta = \hat{A}\Gamma E$ (δεδ.)

3). $B\hat{A}\Delta = \hat{A}\Gamma E$ (ως παραπληρ. ίσων γωνιών)

$$\left. \begin{array}{l} \text{1) } AB = \Gamma E \\ \text{2) } B\hat{A}\Delta = \hat{A}\Gamma E \\ \text{3) } B\hat{A}\Delta = \hat{A}\Gamma E \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{π-Γ-π} \\ \text{π-Γ-π} \end{array} \Rightarrow \triangle B\hat{A}\Delta = \triangle \hat{A}\Gamma E$$

Γ₃ $B\hat{A}\Delta = \hat{A}\Gamma E \Rightarrow AD = AE$ και $\Delta Z = E\Gamma$ (ως ακτίρες ίσων κύκλων)
 οπότε $AZ = AH$ άρα $\triangle AZH$ ισοσκελές.

Γ₄ AM διάμετρος στο ισοσκ. τριγ. $\triangle AB\Gamma$ άρα και διχοτόμος. \Rightarrow
 Από $\Gamma_2 \Rightarrow B\hat{A}\Delta = \hat{A}\Gamma E$

$\Rightarrow M\hat{A}\Delta = M\hat{A}E$ άρα η AM διχοτόμος στο ισοσκ. τριγ. $\triangle AZH$
 οπότε θα είναι και διάμετρος.

Γ₅ Συγκρ. τα τριγ. $\triangle A\hat{\Theta}M$ και $\triangle A\hat{I}M$ τα οποία έχουν:

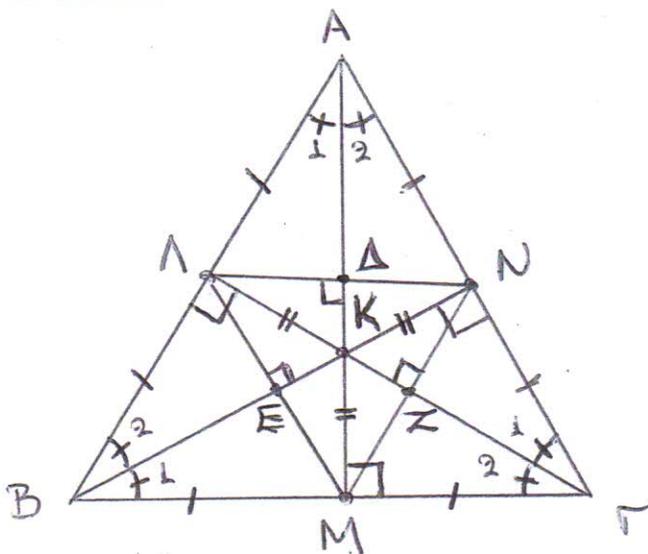
1). AM κοινή

2). $M\hat{A}\Theta = M\hat{A}I$ (από Γ_4)

3). $A\hat{\Theta}M = \hat{A}I M$ (ως διαφορά ίσων πλ.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{1) } AM \text{ κοινή} \\ \text{2) } M\hat{A}\Theta = M\hat{A}I \\ \text{3) } A\hat{\Theta}M = \hat{A}I M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{π-Γ-π} \\ \text{π-Γ-π} \end{array} \Rightarrow \triangle A\hat{\Theta}M = \triangle A\hat{I}M \Rightarrow \Theta M = I M.$$

ΘΕΜΑ Δ



$AN = NG = \Gamma M = MB = B\Gamma = \Gamma A$
 ως μισά ίσων πλευρών.

AM, BN, ΓΛ διάμετροι οπότε
 και ύψη και διχοτόμοι του
 τριγ. $\triangle AB\Gamma$.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$$

ως μισά ίσων γωνιών.

$AM \perp B\Gamma, BN \perp \Gamma A, \Gamma L \perp AB$

Δ1 Συγκρ. τα τριγ. $\hat{A}\hat{L}\hat{N}$, $\hat{L}\hat{B}\hat{M}$ τα οποία έχουν:

$$\begin{array}{l} 1). AL = BL \text{ (δεδ.)} \\ 2). AN = BM \text{ (δεδ.)} \\ 3). \hat{A} = \hat{B} \text{ (δεδ.)} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{π-γ-π} \\ \text{π-γ-π} \end{array} \right. \hat{A}\hat{L}\hat{N} = \hat{L}\hat{B}\hat{M} \Rightarrow LN = LM \text{ (1)}$$

Συγκρ. τα τριγ. $\hat{A}\hat{L}\hat{N}$, $\hat{\Gamma}\hat{M}\hat{N}$ τα οποία έχουν:

$$\begin{array}{l} 1). AN = N\Gamma \text{ (δεδ.)} \\ 2). AL = \Gamma M \text{ (δεδ.)} \\ 3). \hat{A} = \hat{\Gamma} \text{ (δεδ.)} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{π-γ-π} \\ \text{π-γ-π} \end{array} \right. \hat{A}\hat{L}\hat{N} = \hat{\Gamma}\hat{M}\hat{N} \Rightarrow LN = MN \text{ (2)}$$

Από (1), (2) $\Rightarrow LN = LM = MN$ οπότε $\hat{M}\hat{N}\hat{L}$ ισοπλευρο.

Δ2 Κ ευθεία της διχοτόμου AK άρα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{L}\hat{A}\hat{N}$ οπότε $KL = KN$ (3).

Ομοίως Κ ευθεία της διχοτόμου ΓΚ οπότε $KN = KM$ (4).

Από (3), (4) $\Rightarrow KL = KN = KM$.

Δ3 Κ ευθεία της μεσοκαθέτου ΚΛ του τμήματος AB οπότε θα ισαπέχει από τα άκρα του άρα $KA = KB$ (5).

Ομοίως Κ ευθεία της μεσοκαθέτου ΚΜ άρα $KB = ΚΓ$ (6).

Από (5), (6) $\Rightarrow KA = KB = ΚΓ$.

Δ4 Από Δ2 τα ευθεία L, M, N ισαπέχουν από το Κ άρα ορίζεται κύκλος που διέρχεται από αυτά κι έχει κέντρο Κ.

Αντίστροφα από Δ3 και για τα A, B, Γ.

Δ5 Στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα $KA = KB = ΚΓ$, τα τμήματα AB, ΒΓ και ΑΓ είναι χορδές και αφού είναι

ίσες άρα και τα αντίστροφα τόξα τους θα είναι ίσα.

Δηλαδή $\hat{AB} = \hat{A\Gamma} = \hat{B\Gamma}$.

Δ6] Η ΑΚ διχοτόμος στο $\triangle \Lambda \Gamma \Delta$ τριγ. $\hat{\Lambda} \hat{\Gamma} \hat{\Delta}$ άρα και
μεσοκάθετος του $\Lambda \Delta$ οπότε $AK \perp \Lambda \Delta$.

Ομοίως $BK \perp \Lambda \Gamma$ και $CK \perp \Gamma \Delta$.

Η ΚZ ύψος στο $\hat{\Lambda} \hat{\Gamma} \hat{\Delta}$ άρα και διχοτόμος οπότε
το Κ σημείο της διχοτόμου ΑΚ του τριγώνου άρα
θα ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma} \hat{\Delta} \hat{\Lambda}$ δηλαδή

$$KE = KA \quad (7)$$

Αντίστοιχα Κ σημείο της διχοτόμου ΜΚ της $\hat{\Gamma} \hat{\Delta} \hat{\Lambda}$
οπότε $KE = KZ \quad (8)$.

Από (7), (8) $\Rightarrow KE = KA = KZ$.