ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ 21/02/2016

Α1) Βιβλίο σελ.

Α2) Βιβλίο σελ.

Α3) α) → Λ , β) → Σ , γ) → Σ , δ) → Σ , ε) → Σ

Α4) 1. Λ , 2. Σ , 3. Σ , 4. Σ , 5. Σ

ΘΕΜΑ Β $P(x)=\lambda x^3+(\lambda-\mu)x^2-4\lambda x+3$

Β1) α) αν $\lambda\neq 0$, ΜΕΡ ΤΟΤΕ το P είναι 3ου βαθμού

β) αν $\lambda=0$ τότε $P(x)=-\mu x^2+3$.

β1) αν $\lambda=0$ και $\mu\neq 0$ τότε το P είναι 2ου βαθμού

β2) αν $\lambda=0$ και $\mu=0$ τότε το $P(x)=3$ και είναι μηδενικού βαθμού

Β2) $P(1)=0 \Leftrightarrow \lambda+(\lambda-\mu)-4\lambda+3=0$

$P(2)=15 \Leftrightarrow 8\lambda+4(\lambda-\mu)-8\lambda+3=15 \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda-\mu+3=0 \\ 4\lambda-4\mu-12=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu=3 \\ \lambda-\mu=3 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 3\lambda=6 \Leftrightarrow \lambda=2$

ΤΟΤΕ $2-\mu=3 \Leftrightarrow \mu=-1$.

Β3) Για $\lambda=2$, $\mu=-1$ το $P(x)$ γίνεται: $P(x)=2x^3+3x^2-8x+3$

α) $P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-8x+3=0$

	2	3	−8	3
1		2	5	−3
	2	5	−3	0

$(x-1)(2x^2+5x-3)=0$

$x-1=0$ ή $2x^2+5x-3=0$

$x=1$ $\quad \Delta=1$, $x_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{4} < \begin{matrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \end{matrix}$ άρα $x=1$ ή $x=-1$ ή $x=-\frac{3}{2}$

β) $(2x-1)Q(x)=P(x)$ (2)

Έστω ότι το Q είναι πολυώνυμο ν βαθμού τότε

από την (2) ισχύει $1+\nu=3 \Leftrightarrow \nu=2$

Έστω $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ τότε η (2) γράφεται

$(2x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2x^3+3x^2-8x+3 \Leftrightarrow$

$2\alpha x^3+2\beta x^2+2\gamma x-\alpha x^2-\beta x-\gamma=2x^3+3x^2-8x+3 \Leftrightarrow$

$2\alpha x^3+(2\beta-\alpha)x^2+(2\gamma-\beta)x-\gamma=2x^3+3x^2-8x+3$

Άρα δημιουργείται το σύστημα.

$\begin{cases} 2\alpha=2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1} \\ 2\beta-\alpha=3 \Leftrightarrow 2\beta-1=3 \Leftrightarrow 2\beta=4 \Leftrightarrow \boxed{\beta=2} \\ 2\gamma-\beta=-8 \Leftrightarrow \text{αληθής}. \\ -\gamma=3 \Leftrightarrow \boxed{\gamma=-3} \end{cases}$

Άρα $Q(x)=x^2+2x-3$

δ) $P(-1)\eta\mu^2x - 18\sigma\upsilon\nu x = P(-3) \Leftrightarrow$

Ισχύουν $P(-1) = -2+3+8+3 = 12$

$P(-3) = 2(-3)^3+3(-3)^2-8(-3)+3 = -54+27+24+3 = 0$

Άρα η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$12\eta\mu^2x - 18\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$

$2\eta\mu^2x - 3\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$

$2(1-\sigma\upsilon\nu^2x) - 3\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow$

$-2\sigma\upsilon\nu^2x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$, θέτω $\sigma\upsilon\nu x = y$ τότε $-2y^2 - 3y + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(-2)\cdot 2 = 25$

$y_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{-4} = \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Άρα $\sigma\upsilon\nu x = -2$ αδύνατη διότι $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

ή $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$\begin{cases} x = 2k\pi + \pi/3 \\ x = 2k\pi - \pi/3 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) α) $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)} + \frac{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1-\sigma\upsilon\nu x)} =$

$= \frac{\eta\mu x + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{2}{\eta\mu x}$

β) $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \overset{(α)}{\Leftrightarrow} \frac{2}{\eta\mu x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi/3 \\ x = 2k\pi + \pi - \pi/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi/3 \\ x = 2k\pi + 2\pi/3 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Γ2) Α) $f(x) = \alpha\cdot\eta\mu\frac{2x}{3} + \beta$

$M(0,1) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha\cdot\eta\mu 0 + \beta = 1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$

$-1 \le \eta\mu\frac{2x}{3} \le 1 \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} -\alpha \le \alpha\eta\mu\frac{2x}{3} \le \alpha \Leftrightarrow 1-\alpha \le \alpha\eta\mu\frac{2x}{3} + 1 \le \alpha + 1 \Leftrightarrow$

$1-\alpha \le f(x) \le \alpha+1$

αφού $\max f = 3$ ισχύει $\alpha+1 = 3 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$

Άρα $f(x) = 2\eta\mu\frac{2x}{3} + 1$

Β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{2x}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{2x}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{2x}{3} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \frac{2x}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ \frac{2x}{3} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6k\pi - \frac{\pi}{2} \\ 2x = 6k\pi + \frac{7\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 3k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases}$

Γ3) $A = 2\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = 2\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \eta\mu\frac{\pi}{4}\eta\mu x\right) - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x =$

α) $2\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\eta\mu x\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}\eta\mu x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{2}\eta\mu x$

(Β) $A=1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\eta\mu x=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{4} \\ x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{5\pi}{4} \end{cases}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $P(x)=x^3-(4+\eta\mu^2\theta)x^2+(7-\omega\sigma\nu^2\theta)x-\alpha$

(Α) (i) $P(1)=0 \Leftrightarrow 1-4-\eta\mu^2\theta+7-\omega\sigma\nu^2\theta-\alpha=0$

$\Leftrightarrow 4-(\eta\mu^2\theta+\omega\sigma\nu^2\theta)-\alpha=0 \Leftrightarrow 4-1=\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha=3}$

(ii) $P(2)=-1 \Leftrightarrow 8-4(4+\eta\mu^2\theta)+2(7-\omega\sigma\nu^2\theta)-3=-1$

$\Leftrightarrow 8-16-4\eta\mu^2\theta+14-2\omega\sigma\nu^2\theta-2=0$

$\Leftrightarrow 4-4\eta\mu^2\theta-2\omega\sigma\nu^2\theta=0$

$\Leftrightarrow 4-2(\eta\mu^2\theta+\omega\sigma\nu^2\theta)-2\eta\mu^2\theta=0$

$\Leftrightarrow 4-2\cdot 1-2\eta\mu^2\theta=0$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\theta=1 \Leftrightarrow \eta\mu\theta=1$ ή $\eta\mu\theta=-1$

- $\eta\mu\theta=1 \Leftrightarrow$
$\eta\mu\theta=\eta\mu\frac{\pi}{2}$
$\begin{cases} \theta=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \theta=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

όμως $0<\theta<\pi \Rightarrow$
$0<2k\pi+\frac{\pi}{2}<\pi \Leftrightarrow$
$0<2k+\frac{1}{2}<1 \Leftrightarrow$
$-\frac{1}{2}<2k<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$-\frac{1}{4}<k<\frac{1}{4}$
όμως $k\in\mathbb{Z}$, άρα $k=0$
άρα $\theta=\frac{\pi}{2}$

- $\eta\mu\theta=-1 \Leftrightarrow$
$\eta\mu\theta=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$
$\begin{cases} \theta=2k\pi-\frac{\pi}{2} \\ \theta=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{2}=2k\pi+\frac{3\pi}{2} \end{cases}$

όμως $0<\theta<\pi$
$0<2k\pi-\frac{\pi}{2}<\pi$
$\vdots$
$\frac{1}{4}<k<\frac{3}{4}$
αδύνατο διότι $k\in\mathbb{Z}$

όμως $0<\theta<\pi$
$0<2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\pi$
$0<2k+\frac{3}{2}<1$
$-\frac{3}{4}<k<-\frac{1}{4}$
αδύνατο διότι $k\in\mathbb{Z}$

Άρα μόνο $\theta=\frac{\pi}{2}$.

(Β) Αν $\alpha=3$ και $\theta=\frac{\pi}{2}$ τότε αντικαθιστώ προκύπτει:

(i) $P(x)=x^3-(4+\eta\mu^2\frac{\pi}{2})x^2+(7-\omega\sigma\nu^2\frac{\pi}{2})x-3$
$=x^3-(4+1)x^2+(7-0)x-3=x^3-5x^2+7x-3$

(ii) $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+7x-3=0$

	1	−5	7	−3
1		1	−4	3
	1	−4	3	0

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+3)=0$

$x=1$ ή $x^2-4x+3=0$

$S=-\frac{\beta}{\alpha}=4$ $\quad$ $x=1$

$P=\frac{\gamma}{\alpha}=3$ $\quad$ $x=3$

Δ2) $6\sigma\upsilon 2x-5\sigma\upsilon x+3=0$

(i) $\sigma\upsilon 2x-5\sigma\upsilon x+3=0 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon^2 x-1-5\sigma\upsilon x+3=0$

$2\sigma\upsilon^2 x-5\sigma\upsilon x+2=0$

Θέτω $\sigma\upsilon x=\omega$ τότε $2\omega^2-5\omega+2=0$, $\Delta=9$, $\omega_{1,2}=2, \frac{1}{2}$

$\sigma\upsilon x=2$, αδύνατο ή $\sigma\upsilon x=\frac{1}{2}$

Διότι $-1\le\sigma\upsilon x\le 1$

$\forall x\in\mathbb{R}$

(ii) Από $\sigma\upsilon x=\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

(iii) $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi \Leftrightarrow 3\pi<2x<4\pi$

$\sigma\upsilon 2x=-\frac{1}{2}$

~~$\sigma\upsilon 2x=1-\eta\mu^2 x$~~

Από $\sigma\upsilon^2 2x+\eta\mu^2 2x=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 2x=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Όμως $2x\in(3\pi,4\pi)$ άρα πρέπει $\eta\mu 2x<0$ άρα δεκτό

το $\eta\mu 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Επίσης: $\varepsilon\varphi 2x=\frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon 2x}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

και $\sigma\varphi 2x=\frac{1}{\varepsilon\varphi 2x}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$