πρότυπο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ...

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ...........................ΤΜΗΜΑ:..............................

ΜΑΘΗΜΑ:..

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ....

ΒΑΘΜΟΣ: ....

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
05/01/2016

Θέμα Α

A_1. σελ. βιβλίου.

A_2. σελ. βιβλίου

A_3. i) Λάθος, ii) Λάθος, iii) Σωστό, iv) Λάθος, v) Λάθος

Θέμα Β

B_1) Ισχύει:

$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 13 \geq -13 \Leftrightarrow$

$f(x) \geq -13 \Leftrightarrow$

$f(x) \geq f(0)$.

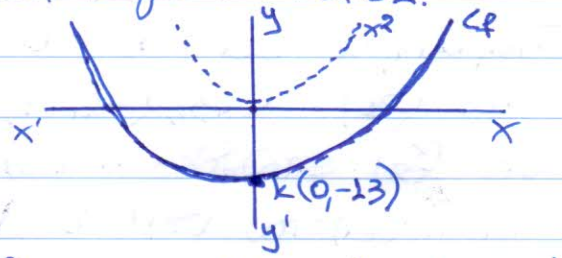
Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$.

B_2) $A_f = \mathbb{R}$, συμμετρικό σύνολο δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ και επιπλέον,

$f(-x) = (-x)^2 - 13 = x^2 - 13 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα f άρτια στο πεδίο ορισμού της το $\mathbb{R}$.

β) σκέψη για το B_1, B_2.



Η f(x) είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού άρα η C_f της είναι η παραβολή $y = x^2 - 13$ η οποία έχει κορυφή το σημείο $K(0,-13)$. Άρα η f παρουσιάζει min στο $x_0 = 0$. Επίσης η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, άρα η f είναι άρτια συνάρτηση.

B_3) Ισχύει $f(x) = g(x) - 13$ Άρα η C_f προκύπτει από την <u>κατακόρυφη</u> μετατόπιση της C_g κατά 13 μονάδες προς τα <u>κάτω</u>.

B_4) $\Sigma_1: \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 13 = 0 \quad (2) \end{cases}$

$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} x^2+\left(\frac{6}{x}\right)^2-13=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{36}{x^2}-13=0 \Leftrightarrow$ ΕΚΠ$=x^2$

$x^4+36-13x^2=0 \Leftrightarrow x^4-13x^2+36=0 \Leftrightarrow$

$(x^2)^2-13x^2+36=0$

Θέτω $\omega=x^2\geq 0$ τότε η παραπάνω εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$\omega^2-13\omega+36=0$

$S=-\frac{\beta}{\alpha}=13$ || $\omega=4$ ή $\omega=9$

$P=\frac{\gamma}{\alpha}=36$

ή $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=25$

$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{13\pm5}{2}= \begin{cases}9\\4\end{cases}$

Άρα: $x^2=4 \Leftrightarrow x=+2$ ή $x=-2$

ή $x^2=9 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$

- Αν $x=2$ τότε $\overset{(1)}{}$ $y=3$ άρα $(x_1,y_1)=(2,3)$
- Αν $x=-2$ τότε (1) $y=-3$ άρα $(x_2,y_2)=(-2,-3)$
- Αν $x=3$ τότε (1) $y=2$ άρα $(x_3,y_3)=(3,2)$
- Αν $x=-3$ τότε (1) $y=-2$ άρα $(x_4,y_4)=(-3,-2)$

Β4) i

$\Sigma_2: \begin{cases}|xy|=6\\x^2+y^2=13.\end{cases}$

Παρατηρώ ότι αν τα τέσσερα ζευγάρια λύσεων του (Σ_1) $(2,3), (-2,-3), (3,2), (-3,-2)$ αντικαταστούν στο (Σ_2) επαληθεύουν και οι δύο εξισώσεις του, άρα όλες οι λύσεις του (Σ_1) είναι και λύσεις του (Σ_2)

Β4) ii

$(\Sigma_2): \begin{cases}|xy|=6\\x^2+y^2=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=6 \text{ ή } xy=-6\\x^2+y^2=13\end{cases}$

$(\Sigma_{2(\alpha)}): \begin{cases}xy=6\\x^2+y^2=13\end{cases}$

$\Updownarrow$

αποτελεί το σύστημα (Σ_1)

(ή) $(\Sigma_{2(\beta)}): \begin{cases}xy=-6\\x^2+y^2=13.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{6}{x} \ (3)\\x^2+y^2=13 \ (4)\end{cases}$

$(4) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x^2+\left(-\frac{6}{x}\right)^2=13 \Leftrightarrow$

$x^2+\frac{36}{x^2}=13 \Leftrightarrow$

$x^4-13x^2+36=0 \Leftrightarrow$

Θέτω $x^2=\omega$ (από Β4) ερώτημα)

$x=\pm2$ ή $x=\pm3$

- Αν $x=2$ τότε $y=-3$ άρα $(x,y)=(2,-3)$

$x=-2$ τότε $y=3$ $(x,y)=(-2,3)$

- - -

Άρα το (Σ_2) εκτός από τις (4) λύσεις του (Σ_1) δέχεται και 4 επιπλέον λύσεις τις $(2,-3), (-2,3), (3,-2), (-3,2)$

<u>β' σκέψη για το Β4) ii)</u>

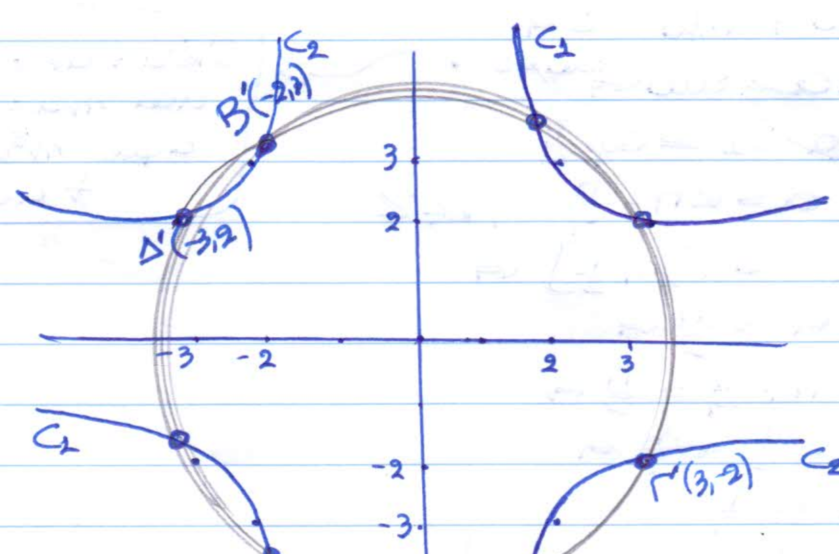
<u>Σχηματικά</u>

Το $\Sigma_2(\alpha)$ είναι το (Σ_1): $\begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

που έχουμε δείξει ότι έχει 4 λύσεις, άρα η ~~παρα~~ ισοσκελής υπερβολή $C_1: xy=6$ και ο κύκλος $C_2: x^2+y^2=13$ έχουν 4 κοινά σημεία τα $A(2,3)$, $B(-2,-3)$, $\Gamma(3,2)$, $\Delta(-3,-2)$.

Το $\Sigma_2(\beta)$: $\begin{cases} xy=-6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

Είναι ένα σύστημα μεταξύ της υπερβολής $C_1': xy=-6$ και του κύκλου $C_2: x^2+y^2=13$ που λόγω συμμετρικότητας από το παρακάτω σχήμα προκύπτει ότι υπάρχουν και άλλα τέσσερα κοινά σημεία τα $A'(2,-3)$, $B'(-2,3)$, $\Gamma'(3,-2)$, $\Delta'(-3,2)$



<u>ή απλούστερα</u> Το Σ_1 έχει $xy=6$ ενώ το Σ_2 έχει $|xy|=6$ <u>άρα</u> οι λύσεις x,y που είναι ετερόσημες π.χ. $x=-2, y=3$, $x=2, y=3$ επαληθεύουν το Σ_2 αλλά <u>όχι</u> το Σ_1

Θέμα Γ

$f(x) = x^3 + (συνα-1)^2 x^2 + (ημα+1)^2 x - 1.$

Γ1). Έστω ότι το σημείο $A(1,0) \in C_f$ τότε ισοδύναμα θα είχαμε:

$f(1) = 0 \Leftrightarrow$

$\cancel{1^3} + (συνα-1)^2 \cdot 1^2 + (ημα+1)^2 \cdot 1 \cancel{-1} = 0 \Leftrightarrow$

$(συνα-1)^2 + (ημα+1)^2 = 0$

$συνα - 1 = 0$ και $ημα + 1 = 0$

$συνα = 1$ $\quad$ $ημα = -1$

όμως τότε: $ημ^2α + συν^2α = 1^2 + (-1)^2 = 2$, άτοπο, αφού για κάθε $α \in R$ $ημ^2α + συν^2α = 1$.

Άρα, τελικά το σημείο $A \notin C_f$.

Γ2) "η αριθμητική τιμή της f στο $x=1$ ισούται με 3" $\Leftrightarrow$

$f(1) = 3 \Leftrightarrow$

$\cancel{1} + (συνα-1)^2 + (ημα+1)^2 \cancel{-1} = 3 \Leftrightarrow$

$\underline{συν^2α} - 2συνα + 1 + \underline{ημ^2α} + 2ημα + 1 = 3 \Leftrightarrow$

$1 - 2συνα + 2ημα + 1 + 1 = 3 \Leftrightarrow$

$-2συνα + 2ημα = 0 \Leftrightarrow$

$ημ\,α = συνα \overset{συνα \neq 0}{\Leftrightarrow}$

διότι: αν συνα=0 τότε και ημα=0, άτοπο αφού $ημ^2α + συν^2α = 1$ $\forall α \in R$

$εφα = 1 = εφ\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow α = κ\pi + \frac{\pi}{4}$, $κ \in Z$

Όμως, θέλουμε $α \in [0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow$

$0 \leq α \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$0 \leq κ\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$0 \leq κ + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{4} \leq κ \leq \frac{1}{4}$

όμως $κ \in Z$ άρα δεκτό μόνο το $κ = 0$

Επομένως $\boxed{α = \frac{\pi}{4}}$

Γ3) $ημ(5\pi+α) = ημ(4\pi+\pi+α) = ημ(\pi+α) = -ημα$

$συν(7\pi-α) = συν(6\pi+\pi-α) = συν(\pi-α) = -συνα$

$ημ\left(\frac{5\pi}{2}-α\right) = ημ\left(\frac{4\pi+\pi}{2}-α\right) = ημ\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-α\right) = ημ\left(\frac{\pi}{2}-α\right) = συνα$

$συν\left(\frac{7\pi}{2}+α\right) = συν\left(\frac{4\pi+3\pi}{2}+α\right) = συν\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}+α\right) = συν\left(\frac{3\pi}{2}+α\right) = ημα$

$εφ(5\pi+α) = εφ(4\pi+\pi+α) = εφ(\pi+α) = εφα$

$\eta\mu(7\pi-\alpha) = \eta\mu(6\pi+\pi-\alpha) = \eta\mu(\pi-\alpha) = \eta\mu\alpha$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi+\pi}{2}-\alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \eta\mu\alpha$

$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right) = \sigma\varphi\left(\frac{4\pi+3\pi}{2}+\alpha\right) = \sigma\varphi\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\varepsilon\varphi\alpha$

Άρα ισοδύναμα η παράσταση K γράφεται:

$$K = \frac{-\cancel{\eta\mu\alpha}\cdot(-\sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\alpha}{\sigma\varphi\alpha\cdot\cancel{\eta\mu\alpha}\ \eta\mu\alpha\ (-\varepsilon\varphi\alpha)} = -\sigma\upsilon\nu^2\alpha \xlongequal{\alpha=\pi/4} -\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4} =$$

$$= -\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right)^2 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Άρα $\boxed{K=-\frac{1}{2}}$

Γ4). $\sigma\upsilon\nu^2x - 2 + 2\eta\mu^2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2x - 2 + \eta\mu^2x + \eta\mu^2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$1 - 2 + \eta\mu^2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$ ή $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$ $\quad\quad$ $\eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\quad\quad$ $\eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$ $\quad\quad$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) (i) $\min f = -1,\ \max f = 5$

(ii) $T = 4\pi$ (χρονική διάρκεια ενός πλήρους κυματισμού)

Δ2). Αφού $T = 4\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 4\omega = 2 \Leftrightarrow \boxed{\omega=\frac{1}{2}}$

Ισχύει: $-1 \le \eta\mu\omega x \le 1 \xLeftrightarrow{\rho>0}$

$-\rho \le \rho\eta\mu\omega x \le \rho \Leftrightarrow$

$-\rho+\kappa \le f(x) \le \rho+\kappa.$

Άρα από Δ1)i) $\begin{matrix} -\rho+\kappa=-1 \\ \rho+\kappa=5 \end{matrix} \xRightarrow{(+)} 2\kappa = 4 \Leftrightarrow \boxed{\kappa=2}$

τότε $\boxed{\rho=3}$

Άρα: $f(x) = 3\eta\mu\frac{x}{2} + 2.$

Δ3) $A(x_0, \frac{7}{2}) \in C_f \Leftrightarrow$

$f(x_0) = 7/2 \Leftrightarrow$

$3\eta\mu\frac{x_0}{2} + 2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow$

$3\eta\mu\frac{x_0}{2} = \frac{7}{2} - 2 \Leftrightarrow 3\eta\mu\frac{x_0}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\eta\mu\frac{x_0}{2} = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

$\begin{cases} \frac{x_0}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \frac{x_0}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x_0 = 4k\pi + \frac{5\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Όμως από σχήμα $x_0 \in (5\pi, 6\pi)$

άρα για $k=1$ στη 2η γενική λύση προκύπτει

$x_0 = 4\pi + \frac{5\pi}{3} = 4\pi + \frac{3\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 5\pi + \frac{2\pi}{3}$, αποδεκτό

Άρα $\boxed{x_0 = \frac{17\pi}{3}}$

Δ4) · αν $a < -1$, τότε $f(x) = a$, αδύνατη. άρα η C_f δεν τέμνει την οριζόντια ευθεία $y = a$, σε κανένα σημείο.

· αν $a = -1$ τότε $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 3\pi$ (μια λύση)

· αν $a \in (-1, 5)$ τότε $f(x) = a$ έχει 2 ρίζες, άρα τότε η C_f τέμνει την οριζόντια ευθεία $y = a$ σε δύο σημεία

· αν $a = 5$ τότε $f(x) = 5 \Leftrightarrow x = \pi$ (όχι και $x = 5\pi$ άρα έχουμε ανοικτό στο 5π)

· αν $a > 5$ τότε $f(x) = a$, αδύνατη άρα τότε η C_f δεν τέμνει σε κανένα σημείο την $y = a$.