Θέμα Α

A1 (i) Σελ. βιβλίου (ii) Σελ. βιβλίου (iii) Σελ. βιβλίου

A2 i) $\to$ β , ii) $\to$ γ , iii) $\to$ α

A3 α $\to$ Λ, β $\to$ Σ, γ $\to$ Σ, δ $\to$ Σ, ε $\to$ Λ.

Θέμα Β

B1 $\Sigma_1: \begin{cases} 2x-3y=2 \\ x+2y=8 \end{cases} \overset{(1)}{\underset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 2x-3y=2 \\ -2x-4y=-16 \end{cases} \Big\| \oplus \quad -7y=-14 \Leftrightarrow \boxed{y=2}$

τότε η (1) για $y=2$ γίνεται: $x+2\cdot 2=8 \Leftrightarrow \boxed{x=4}$

Άρα $(x,y)=(4,2)$.

B2 $\Sigma_2: \begin{cases} 2\sqrt{k}-3\sqrt{\lambda}=2 \\ \sqrt{k}+2\sqrt{\lambda}=8 \end{cases}$

Αν θέσω $\sqrt{k}=x$ και $\sqrt{\lambda}=y$ τότε προκύπτει το Σ_1 του B1 ερωτήματος
άρα μπορώ να απαντήσω απευθείας. Λύσω B1 ερωτήματος
ότι $\sqrt{k}=4 \Leftrightarrow (\sqrt{k})^2=4^2 \Leftrightarrow k=16$
και $\sqrt{\lambda}=2 \Leftrightarrow (\sqrt{\lambda})^2=2^2 \Leftrightarrow \lambda=4$.

Άρα: $(k,\lambda)=(16,4)$.

B3 Από B1) $x_0=4$ και $y_0=2$. Άρα θέτω στην $f(x)=ax^3+\beta$ όπου $a=4$ και $\beta=2$ και προκύπτει:

$f(x)=4x^3+2$, με $A_f=\mathbb{R}$ (πεδίο ορισμού)

Ισχύει $\forall x\in A_f$ και $-x\in A_f$

και $f(-x)=4(-x)^3+2=-4x^3+2 \neq -f(x)$ (το $-f(x)$ είναι το $-4x^3-2$)

Άρα f όχι περιττή. (*) η μονοτονία στο τέλος

Θέμα Γ

$\varepsilon: y=\lambda x-2$ και $C: \frac{1}{2}y=x^2 \Leftrightarrow y=2x^2$

Γ1 Το σύστημα που δημιουργείτε από την ευθεία (ε) και την παραβολή (C) είναι το

$\Sigma: \begin{cases} y=2x^2 \quad (1) \\ y=\lambda x-2 \quad (2) \quad \lambda\in\mathbb{R} \end{cases}$

α) Για να έχουν τα δύο σχήματα 1 κοινό σημείο πρέπει το
β) παραστάνω (Σ) να έχει μόνο μια λύση.

Άρα: $(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda x-2=2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-\lambda x+2=0 \quad (3)$

β) Η εξίσωση (3) $2x^2-\lambda x+2=0$ είναι τριώνυμο (εξίσωση 2ου βαθμού)
Άρα το πλήθος των ριζών της θα εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας Δ η οποία είναι:

$a=2,\ \beta=-\lambda,\ \gamma=2$

$\Delta=\beta^2-4a\gamma=(-\lambda)^2-4\cdot 2\cdot 2=\lambda^2-16.$

• Αν $\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda^2-16=0 \Leftrightarrow \lambda^2=16 \Leftrightarrow \lambda=\pm 4$ τότε η εξίσωση (3) έχει μια διπλή ρίζα άρα και το σύστημα (Σ) θα έχει μοναδική λύση, επομένως η ευθεία (ε) και η παραβολή (c) θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

• Αν $\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda^2-16>0$

	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
λ^2-16	+	−	+	

ή $\lambda^2>16 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2}>\sqrt{16} \Leftrightarrow |\lambda|>4 \Leftrightarrow \lambda<-4$ ή $\lambda>4$

$\lambda<-4$ ή $\lambda>4$

Τότε η εξίσωση (3) θα έχει δύο άνισες ρίζες, άρα και το σύστημα (Σ) θα έχει δύο διαφορετικές λύσεις και επομένως η ευθεία και η παραβολή θα τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία.

γ) Το $\lambda=2016$ ανήκει στο διάστημα $(4,+\infty)$ άρα τότε η (3) θα έχει δύο λύσεις άρα και το (Σ) άρα η ευθεία και η παραβολή θα τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία.

$\boxed{Γ2}$ Για $\lambda=5$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} y=2x^2 & (1) \\ y=5x-2 & (2) \end{cases}$$

$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} 5x-2=2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

$\Delta=9$ άρα $x_{1,2}=\frac{5\pm 3}{4}=2$ ή $\frac{1}{2}$

• Αν $x=2$ τότε (1) $y=8$ επομένως 1η λύση $(x_1,y_1)=(2,8)$

• Αν $x=\frac{1}{2}$ τότε (1) $y=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ άρα 2η λύση $(x_2,y_2)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\boxed{Γ3}$ $\begin{cases} \sqrt{\beta}=5\sqrt{a}-2 \\ \sqrt{\beta}=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\beta}=5\sqrt{a}-2 \\ \sqrt{\beta}=2(\sqrt{a})^2 \end{cases}$ (Ισχύει $a=(\sqrt{a})^2$, αφού $a\geq 0$)

Πρέπει και εδώ να παρατηρήσουμε ότι είναι ίδιο με το σύστημα του Γ2) ερωτήματος αν θέσω στο Γ2) $x=\sqrt{\alpha}$ και $y=\sqrt{\beta}$

Άρα στο Γ2) ισχύουν:

- $\sqrt{\alpha}=2 \Leftrightarrow \alpha=4$
  $\sqrt{\beta}=8 \Leftrightarrow \beta=64$

ή

- $\sqrt{\alpha}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{4}$
  $\sqrt{\beta}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{4}$

Άρα 1η λύση $(\alpha_1,\beta_1)=(4,64)$ ή 2η λύση $(\alpha_2,\beta_2)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

- $A(-1,0)\in C_f \Leftrightarrow f(-1)=0 \Leftrightarrow \alpha(-1)^2+\beta(-1)+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta+\gamma=0 \quad (1)$
- $B(2,6)\in C_f \Leftrightarrow f(2)=6 \Leftrightarrow \alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2+\gamma=6 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta+\gamma=6 \quad (2)$
- $\Gamma(1,0)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=0 \quad (3)$

Προκύπτει το 3x3 γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma)\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0 & (1)\\ 4\alpha+2\beta+\gamma=6 & (2)\\ \alpha+\beta+\gamma=0 & (3)\end{cases}$$

Από (1),(3) προκύπτει: $\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases} \xrightarrow{(-1)} \begin{cases}-\alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 2\beta=0 \Leftrightarrow \boxed{\beta=0}$

Τότε (1),(2): $\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ 4\alpha+\gamma=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha-\gamma=0\\ 4\alpha+\gamma=6\end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 3\alpha=6 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=2}$ και άρα $\boxed{\gamma=-2}$

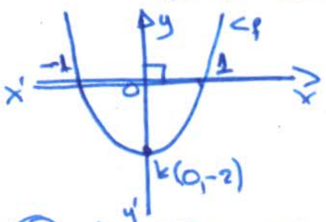
Επομένως: $f(x)=2x^2-2$

Δ2) α) τομή C_f με $x'x \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Άρα $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

β) τομή C_f με $y'y \Leftrightarrow y=f(0)=-2$ άρα $\Gamma(0,-2)$

↳ κορυφή $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)=(0,-2)$ και $\alpha=2>0$ Άρα.



γ) Από β) προκύπτει $f\downarrow$ στο $\Delta_1=(-\infty,0]$ και $f\uparrow$ στο $\Delta_2=[0,+\infty)$

Επίσης ισχύουν: $\forall x\in A_f=\mathbb{R}$ και $-x\in A_f=\mathbb{R}$

και $f(-x)=2(-x)^2-2=2x^2-2=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

Άρα f άρτια στο $\mathbb{R}$ (ή από σχήμα C_f συμμετρική ως προς $y'y$)

(δ)

$f(x) + f(-x) < 12 \ (1), \ x \in \mathbb{R}$

Από (ε) η f άρτια στο $\mathbb{R}$ άρα $f(-x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα η (1) ισοδύναμα γράφεται:

$f(x) + f(x) < 12 \Leftrightarrow$

$2f(x) < 12 \Leftrightarrow$

$f(x) < 6 \Leftrightarrow$

$2x^2 - 2 < 6 \Leftrightarrow$

$2x^2 < 8 \Leftrightarrow$

$x^2 < 4$

(α)

$x^2 - 4 < 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 = 4 \\ x = \pm 2 \end{array}}$$

x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in (-2, 2)$

ή

$\sqrt{x^2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow$

$|x| < 2 \Leftrightarrow$

$-2 < x \ 2$

ΤΕΛΟΣ

$\boxed{B_3}$ Συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 2, \ x \in \mathbb{R}$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow$

$4x_1^3 < 4x_2^3 \rightarrow 4x_1^3 + 2 < 4x_2^3 + 2$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα $f \nearrow \mathbb{R}$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΛΑΘΗ !!!

ΘΕΜΑ Β

(B1) $\Sigma_1: \begin{cases} 2x-3y=2 \\ x+2y=8 \end{cases}$ λύθηκε και έδωσε αποτελέσματα $(x,y)=(4,2)$

και μετά έχει το ερώτημα B_2

Να λύσει το σύστημα $\Sigma_2: \begin{cases} 2\sqrt{\kappa}-3\sqrt{\lambda}=2 \\ \sqrt{\kappa}+2\sqrt{\lambda}=8 \end{cases}$

τι παρατηρεί;;;

Είναι <u>ίδιο</u> με το Σ_1 που έχει λύσει αλλά αντί για x έχει $\sqrt{\kappa}$ και αντί του y έχει $\sqrt{\lambda}$

<u>Άρα</u> το Σ_2 θα έχει λύσει:

$\sqrt{\kappa}=4 \Rightarrow \kappa=16$

και $\sqrt{\lambda}=2 \Rightarrow \lambda=4$ Άρα $(\kappa,\lambda)=(16,4)$

Σχόλιο ①

Το Σ_2 δεν έχει αγνώστους τα $\sqrt{\kappa}, \sqrt{\lambda}$ αλλά τα λ, κ.
άρα μην σταματάς στο $\sqrt{\kappa}=4$ και στο $\sqrt{\lambda}=2$

Σχόλιο ②

$\sqrt{\kappa}=4 \Rightarrow (\sqrt{\kappa})^2=4^2 \Rightarrow \kappa=16 \longrightarrow$ Σωστό

$\sqrt{\kappa}=4 \rightarrow \kappa=\pm 2 \longrightarrow$ <u>ΛΑΘΟΣ</u>

αλλά υψώνουμε κατά μέλη στο τετράγωνο για να "φάμε" τη ρίζα.

(B3) Έχει $f(x)=4x^3+2$

και σου ζητάει να εξετάσει αν είναι περιττή.

1ο) Λέει ότι ισχύει $\forall x \in A=\mathbb{R}$ και $-x \in A=\mathbb{R}$

<u>και</u> 2ο) Πρέπει να ελέγξει αν $f(-x)=-f(x)$

Έχουμε: $f(-x)=4(-x)^3+2=-4x^3+2$

Ενώ $-f(x)=-(4x^3+2)=-4x^3-2$

Είναι διαφορετικό άρα <u>ΔΕΝ</u> είναι περιττή

ΘΕΜΑ Γ

$$\Sigma: \begin{cases} y=\lambda x-2 \\ \frac{1}{2}y=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x-2 \\ y=2x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2=\lambda x-2 \Rightarrow 2x^2-\lambda x+2=0 \quad (1)$$

Γ1 α, β. Το πόσες ρίζες έχει το σύστημα καθορίζεται από το πόσες ρίζες έχει η εξίσωση (1).

Η εξίσωση (1) $2x^2-\lambda x+2=0$ είναι παραμετρική εξίσωση 2ου βαθμού. Άρα το πρόσημο της διακρίνουσας καθορίζει το πλήθος των ριζών της (1) άρα κατ' επέκταση και το πλήθος των ~~ριζών~~ λύσεων του συστήματος.

Υπολογίζω διακρίνουσα

- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-\lambda)^2-4\cdot 2\cdot 2=\lambda^2-16$

α. Αν $\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda^2=16 \Rightarrow \lambda=\pm 4$ τότε η (1) έχει διπλή ρίζα άρα και το Σ μοναδική λύση άρα τα σχήματα εφάπτονται.

β. Αν $\Delta>0 \Rightarrow \lambda^2-16>0$.

α' σκέψη

Ανίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο το λ.

λ		-4		4	
λ^2-16	+	0	−	0	+

Άρα $\lambda\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

β' σκέψη

$\lambda^2>16 \Rightarrow$

$\sqrt{\lambda^2}>\sqrt{16} \Rightarrow$

$|\lambda|>4 \Rightarrow$

$\lambda>4$ ή $\lambda<-4$

Γ2 Στο Γ2 λέει να λυθεί για $\lambda=5$

Άρα αντικαθιστώ στο σύστημα $\lambda=5$ και το λύνω με αντικατάσταση.

Γ3 Το σύστημα στο Γ2 είναι το $\begin{cases} y=5x-2 \\ y=2x^2 \end{cases}$ και

λύνοντας βρίσκουμε λύσεις τις $(x_1,y_1)=(2,8)$ και $(x_2,y_2)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

και το σύστημα είναι το

$$\begin{cases}\sqrt{β}=\cancel{3}5\sqrt{α}-2\\ \sqrt{β}=2α\end{cases} \xRightarrow{α=(\sqrt{α})^2} \begin{cases}\sqrt{β}=5\sqrt{α}-2\\ \sqrt{β}=2(\sqrt{α})^2\end{cases}$$

Είναι το ίδιο με το σύστημα του $(Γ_2)$ απλά αντί για
$\sqrt{β}=y$ και $\sqrt{α}=x$ Άρα

οι λύσεις θα είναι:

$\sqrt{β}=8 \Rightarrow β=64$, $\sqrt{α}=2 \Rightarrow α=4$ άρα $(4,64)$ και $\sqrt{β}=\frac{1}{2} \Rightarrow β=\frac{1}{4}$, $\sqrt{α}=\frac{1}{2} \Rightarrow α=\frac{1}{4}$ άρα $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

ΣΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΘΕΜΑ ΠΟΛΛΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΞΑΝΑΛΗΣΑΝ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ:

$$\begin{cases}\sqrt{β}=5\sqrt{α}-2\\ \sqrt{β}=2α\end{cases} \Rightarrow 2α=5\sqrt{α}-2 \Leftrightarrow$$

α) σκέψη

~~$(2α)^2=(5\sqrt{α}$~~

$2α+2=5\sqrt{α} \overset{α\geq 0}{\Leftrightarrow}$

$(2α+2)^2=(5\sqrt{α})^2 \overset{α\geq -1}{\Leftrightarrow}$

$4α^2+8α+4=25α \Rightarrow$

$4α^2-17α+4=0$

και διακρίνουσα

αλλά δυσκολεύει πολύ

ή

β) σκέψη:

$2α-5\sqrt{α}+2=0$

$2(\sqrt{α})^2-5\sqrt{α}+2=0$

Θέτω $\sqrt{α}=k$ τότε

$2k^2-5k+2=0$

$Δ=25-4\cdot2\cdot2=9$

$k_{1,2}=\frac{5\pm3}{4} < {2 \atop \frac{1}{2}}$.

Άρα $\sqrt{α}=2$ ή $\sqrt{α}=\frac{1}{2}$

$α=4$ $\quad α=\frac{1}{4}$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ $f(x)=αx^2+βx+γ,\ α\neq 0$

Τα 2ου βαθμού (τριώνυμα) όπως στο ΘΕΜΑ Δ
$f(x)=2x^2-2$ Βρίσκω κορυφή $K(-\frac{β}{2α}, -\frac{Δ}{4α})$ και
από το σχήμα απαντώ μονοτονία και ακρότατα

Επίσης

$f(x)+f(-x)<12 \iff$ από προηγούμενο ερώτημα:

$f(-x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$

από το ότι είναι άρτια η f.

$f(x)+f(x)<12 \iff$

$2f(x)<12 \iff$

$f(x)<6 \iff$

$2x^2-2<6 \iff$

$x^2<4$

$x^2-4<0$

ή

$\sqrt{x^2}<\sqrt{4} \iff$

$|x|<2 \iff$

$-2<x<2$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2-4=0 \iff \\ x^2=4 \\ x=\pm 2 \end{array}}$$

		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

$-2<x<2$