ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πρότυπο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

11/11/2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$. **Μονάδες: 5**

Θεωρία Σχ. Βιβλίου Σελ 60

Α2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0

Μονάδες: 4

Α3.i) Πότε μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; Θεωρία Σχ. βιβλίου Σελ 32

Μονάδες: 2

ii)Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο; **Μονάδες: 2**

Θεωρία Σχ. βιβλίου Σελ 33

iii)Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέγεται άρτια;

Τι είδους συμμετρία παρουσιάζει ; **Μονάδες: 2**

Θεωρία Σχ. βιβλίου Σελ 35

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μία περιττή συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα xx΄. Λ

β.Αν οι ευθείες 2 γραμμικών εξισώσεων είναι παράλληλες τότε το σύστημα τους έχει μοναδική λύση. Λ

γ. Η συνάρτηση f(x)= -3x+5 είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Σ

δ. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι το 1 τότε η εξίσωση f(x)=2 είναι αδύνατη. Σ

ε. Υπάρχει γωνία x με $\eta\mu x=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu x= -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Σ **Μονάδες: 10**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν ισχύει $6συν^2x + συνx - 1 = 0$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $συνx = -\frac{1}{2}$ **Μονάδες: 8**

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x. **Μονάδες: 8**

Β2. Να αποδείξετε ότι για οποιασδήποτε γωνία x ισχύει η σχέση:

$$\frac{1-εφ^2x}{1+εφ^2x} + ημ^4x = συν^4x$$ **Μονάδες: 9**

Λύση

Β1 α. $6συν^2x + συνx - 1 = 0$

Θέτω $συνx = y$: $6y^2 + y - 1 = 0$

$Δ = 1 + 24 = 25$

$y = \frac{-1 \pm 5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ή $\frac{-6}{12} = -1/2$

Άρα $y = \frac{1}{3}$ ή $y = -1/2$

και $συνx = \frac{1}{3}$ ή $συνx = -\frac{1}{2}$

Απορρ. Δεκτή

διότι $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $συνx < 0$

β. $συνx = -\frac{1}{2}$: $ημ^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow$

$ημ^2x = 1 - συν^2x = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Άρα $ημx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ με $ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ διότι $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Τότε $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$ και $σφx = \frac{1}{εφx} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Β2. $\frac{1-εφ^2x}{1+εφ^2x} + ημ^4x = \frac{1-\frac{ημ^2x}{συν^2x}}{1+\frac{ημ^2x}{συν^2x}} + ημ^4x =$

$= \frac{\frac{συν^2x}{συν^2x} - \frac{ημ^2x}{συν^2x}}{\frac{συν^2x}{συν^2x} + \frac{ημ^2x}{συν^2x}} + ημ^4x =$

$= \frac{\frac{συν^2x - ημ^2x}{συν^2x}}{\frac{συν^2x + ημ^2x}{συν^2x}} + ημ^4x$

$= \frac{συν^2x - ημ^2x}{\underbrace{συν^2x + ημ^2x}_{1}} + ημ^4x$

$= 1 - ημ^2x - ημ^2x + ημ^4x = 1 - 2ημ^2x + ημ^4x$

$= (1 - ημ^2x)^2 = (συν^2x)^2 = συν^4x$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= -x^3+\lambda x$, με $x\in R$ και $\lambda\in R$ η οποία διέρχεται από το σημείο M(-1,4)

α. Να αποδείξετε ότι λ=-3 **Μονάδες: 5**

β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. **Μονάδες: 5**

γ. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες: 5**

δ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2+6)=f(5x)$ **Μονάδες: 5**

ε. Να λύσετε την ανίσωση: $f(2x-1)<4$ **Μονάδες: 5**

Λύση

α. $f(x)=-x^3+\lambda x$

Διέρχεται $M(-1,4)$: $f(-1)=4 \Leftrightarrow$

$-(-1)^3+\lambda(-1)=4 \Leftrightarrow$

$1-\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=-3$.

Άρα $f(x)=-x^3-3x$, $A=R$

β. Αφού $x\in R$ και $-x\in R$ τότε

$f(-x)=-(-x)^3-3(-x)=x^3+3x=-f(x)$, f περιττή.

γ. Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$

τότε $x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow$

$-x_1^3>-x_2^3$ (1)

Ις $x_1<x_2 \Leftrightarrow$

$-3x_1>-3x_2$ (2)

(1) + (2) =>

$-x_1^3-3x_1>-x_2^3-3x_2$

$f(x_1)>f(x_2)$

οπότε f γν. φθίνουσα

δ. $f(x^2+6)=f(5x)$ Αφού f γν. φθίνουσα τότε

$x^2+6=5x \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

$\Delta=25-24=1$

$x=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$

Άρα $x=3$ ή $x=2$

ε. $f(2x-1)<4$ και αφού $f(-1)=4$

τότε $f(2x-1)<f(-1)$ όμως f γν. φθίνουσα

$2x-1>-1 \Leftrightarrow$

$2x>0 \Leftrightarrow x>0$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+(\alpha-\beta)x+2\beta-5\alpha$ με $\alpha, \beta \in R$ και η ευθεία $\psi=(\kappa+\lambda)x-2\kappa+\lambda+1$ με $\kappa, \lambda \in R$.

Δ1. α. Αν η συνάρτηση f έχει κορυφή με τετμημένη 2 και τέμνει τον άξονα ψ στο σημείο με τεταγμένη -1 να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$. **Μονάδες: 4**

Για $\alpha=3$ και $\beta=7$,

β. Να βρείτε την κορυφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (C_f). **Μονάδες: 2**

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (C_f) με τους άξονες. **Μονάδες: 3**

δ. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **Μονάδες: 2**

ε. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή. **Μονάδες: 3**

Δ2.α. Αν η ευθεία $\psi=(\kappa+\lambda)x-2\kappa+\lambda+1$ διέρχεται από τα σημεία Μ(1,-7) και Ν(3,-3) να προσδιορίσετε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in R$. **Μονάδες: 3**

Για $\kappa=4$ και $\lambda=-2$,

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες. **Μονάδες: 4**

γ. Να βρείτε το εμβαδόν που ορίζεται από την ευθεία και τους άξονες. **Μονάδες: 1**

δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής με την ευθεία. **Μονάδες: 3**

Λύση

Δ1. α. $f(x)=x^2+(\alpha-\beta)x+2\beta-5\alpha$

$x_\kappa=2$ άρα $-\frac{\alpha-\beta}{2}=2 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=4$

$y'y: (0,-1)$ $f(0)=-1 \Leftrightarrow 2\beta-5\alpha=-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta=4 \\ -5\alpha+2\beta=-1 \end{cases} \overset{(-2)}{\Rightarrow}$

$2\alpha-2\beta=-8$
$-5\alpha+2\beta=-1$ (+)
$-3\alpha=-9 \Leftrightarrow \alpha=3$ και $-3+\beta=4 \Leftrightarrow \beta=7$

Άρα $f(x)=x^2-4x-1$

β. $x_\kappa=-\frac{-4}{2\cdot 1}=2$ $y_\kappa=-\frac{\Delta}{4\alpha}$ ή $y_\kappa=f(2)=-5$ $K(2,-5)$

γ. Σημεία τομής με

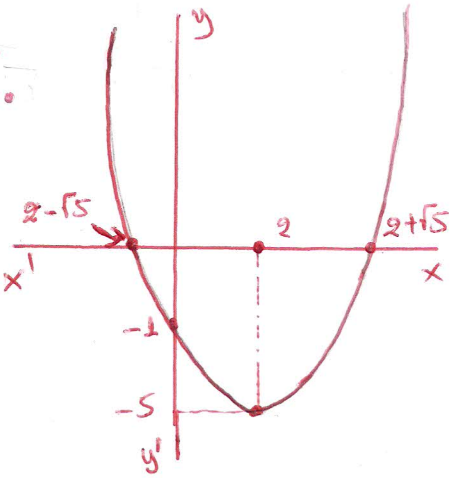
$x'x$: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x-1=0$

$\Delta=16+4=20$, $x=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt5}{2}=2\pm\sqrt5$

Σ. τομής $(2-\sqrt5,0)$ και $(2+\sqrt5,0)$

$y'y$: $x=0$ $f(0)=-1$ Σ. τομής $(0,-1)$

δ.



ε. • Για $x\in(-\infty,2]$ η f γν. φθίνουσα

Για $x\in[2,+\infty)$ η f γν. αύξουσα

• Στο $x=2$ η f έχει ελάχιστο το $f(2)=-5$.

• Δεν είναι άρτια ούτε περιττή.

Δ2. $y=(\kappa+\lambda)x-2\kappa+\lambda+1$

α. Διέρχεται $M(1,-7)$: $x=1$ $y=-7$: $-7=\kappa+\lambda-2\kappa+\lambda+1 \Leftrightarrow$

$-\kappa+2\lambda=-8$

Διέρχεται $N(3,-3)$: $x=3$ $y=-3$: $-3=(\kappa+\lambda)\cdot 3-2\kappa+\lambda+1$

$-3=3\kappa+3\lambda-2\kappa+\lambda+1$

$\kappa+4\lambda=-4$

$$(\Sigma)\ \left.\begin{aligned}-\kappa+2\lambda&=-8\\ \kappa+4\lambda&=-4\end{aligned}\right\}\oplus$$

$6\lambda=-12 \Leftrightarrow \lambda=-2$ και $\kappa-8=-4 \Leftrightarrow \kappa=4$

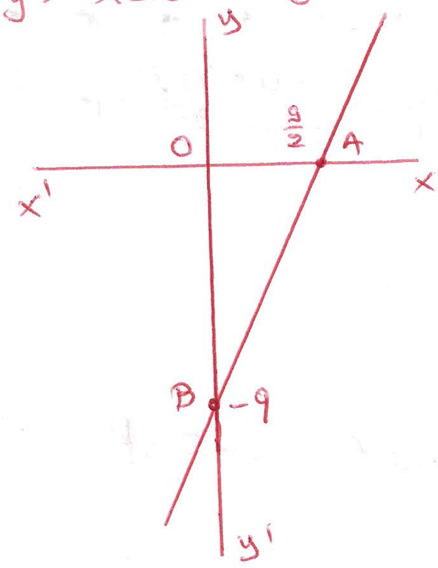
Άρα $y=2x-9$

β. Σημεία τομής με:

$x'x$: $y=0 \Leftrightarrow 2x-9=0 \Leftrightarrow x=9/2$ $\left(\frac{9}{2},0\right)$

$y'y$: $x=0$ $y=2\cdot 0-9 \Leftrightarrow y=-9$ $(0,-9)$

γ.



$E_{OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\frac{9}{2}\cdot 9=\frac{81}{4}$ τ.μ

δ. Λύνω το σύστημα: $f(x)=2x-9 \Leftrightarrow x^2-4x-1-2x+9=0 \Leftrightarrow$

$x^2-6x+8=0$

$\Delta=36-32=4$

$x=\frac{6\pm 2}{2}=\begin{cases}4\\2\end{cases}$

Σημεία τομής:

$x=4$ $y=2\cdot 4-9=-1$ $(4,-1)$

$x=2$ $y=2\cdot 2-9=-5$ $(2,-5)$