

Πρότυπο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
13/11/2016

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της:

α) μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Θεωρία Σχ. Βιβλίου Σελ 42 (Μον. 5)

β) διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της. (Μον. 5)

Θεωρία Σχ. Βιβλίου Σελ 51

A2. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων. (Μον. 5)

Θεωρία Σχ. Βιβλίου Σελ 46

A3. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό και Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

Σ α. Σε ίσες χορδές ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα αποστήματα και αντίστροφα.

Λ β. Αν δυο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα

Λ γ. Δύο τρίγωνα με ίσες περιμέτρους έχουν ίσες πλευρές.

Σ δ. Στο ισόπλευρο τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος

Σ ε. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα τότε απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές. (Μον. 10)

ΘΕΜΑ Β

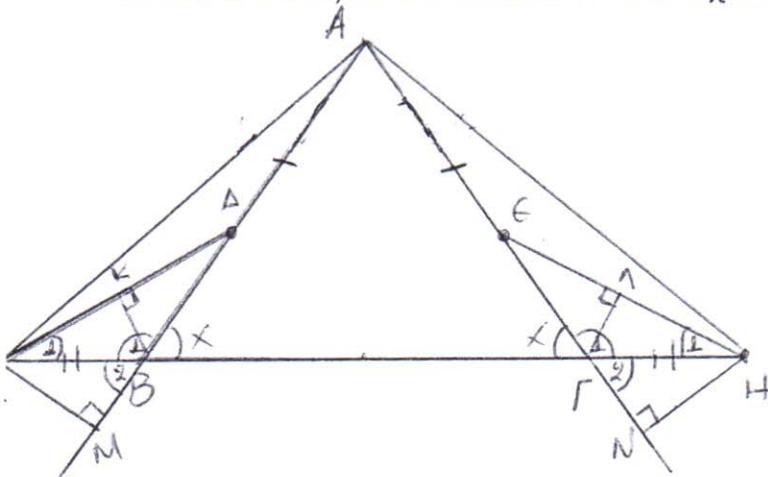
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και Δ, E σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα ώστε $AD = AE$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ προς το B παίρνουμε τμήμα BZ και στην προέκταση της $B\Gamma$ προς το Γ τμήμα ΓH ώστε $BZ = \Gamma H$

B1. Να αποδείξετε ότι το $\triangle AZH$ τρίγωνο είναι ισοσκελές. (Μον. 7)

B2. Να αποδείξετε ότι $\triangle BZ = \triangle \Gamma H$. (Μον. 7)

B3. Φέρνουμε BK κάθετη στη ΔZ και $\Gamma\Lambda$ κάθετη στη $E\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $BK = \Gamma\Lambda$. (Μον. 6)

B4. Να αποδείξετε ότι τα Z και H ισαπέχουν από τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. (Μον. 5)



B1. Συγκρίνω $\triangle ABZ$ $\triangle A\Gamma H$
 $AB = A\Gamma$ $\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές
 $BZ = \Gamma H$ υπόθεση
 $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ παρατηρημ. $\hat{B} = \hat{\Gamma} = x$
 Άρα $\triangle ABZ = \triangle A\Gamma H \Rightarrow$
 $AZ = AH \Rightarrow$
 $\triangle AZH$ ισοσκελές

B2. Συγκρίνω $\triangle BZ$ $\triangle \Gamma H$
 $BZ = \Gamma H$ υπόθεση
 $\Delta B = \Delta \Gamma$ ως διαφορά ίσων $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ παρατηρημ. $\hat{B} = \hat{\Gamma} = x$
 $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (180° - x)

Άρα $\triangle BZ = \triangle \Gamma H \Rightarrow \hat{Z}_1 = \hat{H}_1$ ①

B3. Συγκρίνω $\triangle BKZ$ $\triangle \Gamma\Lambda H$ ορθογ. } Άρα $\triangle BKZ = \triangle \Gamma\Lambda H \Rightarrow$
 $BZ = \Gamma H$ υπόθεση } $BK = \Gamma\Lambda$
 $\hat{Z}_1 = \hat{H}_1$ από ① } $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ από ②

B4. Φέρνω $ZM \perp AB$ και $HN \perp A\Gamma$ γ.δ.ο $ZM = HN$

Συγκρίνω $\triangle BZM$ $\triangle \Gamma HN$ ορθογ.
 $BZ = \Gamma H$ υπόθεση
 $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ διότι $\hat{B}_2 = \hat{B} = x$ & $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma} = x$

Άρα $\triangle BZM = \triangle \Gamma HN \Rightarrow ZM = HN$

ΘΕΜΑ Γ

Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρνουμε τη διχοτόμο AD και παίρνουμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $AB = AE$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $BD = DE$. (Μον. 6)

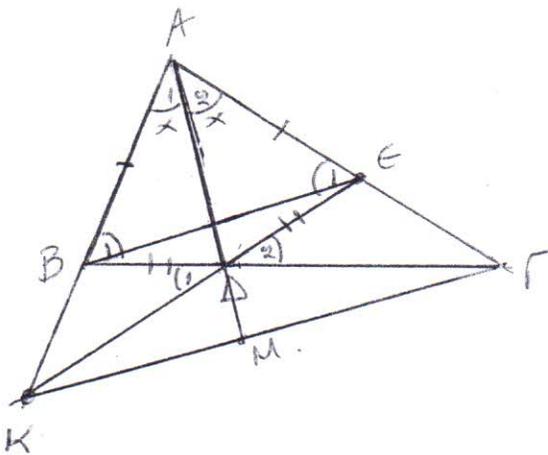
Γ2. Αν η προέκταση της ED τέμνει την προέκταση της AB στο K να αποδείξετε ότι $\triangle KBD = \triangle DEG$. (Μον. 6)

Γ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AD

α. είναι μεσοκάθετη του BE . (Μον. 6)

β. διέρχεται από το μέσο του $K\Gamma$. (Μον. 4)

γ. διχοτομεί την γωνία $\hat{K}\hat{A}\hat{\Gamma}$. (Μον. 3)



Γ1. Συγκρίνω $\triangle ABD$ $\triangle ADE$
 $AB = AE$ υπόθεση
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, AD διχοτόμος
 $AD = AD$ κοινή
 Άρα $\triangle ABD = \triangle ADE \Rightarrow BD = DE$ (1)
 $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (2)

Γ2. Συγκρίνω $\triangle KBD$ $\triangle DEG$
 $BD = DE$ από (1)
 $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ κατακορυφήν
 $\hat{K}\hat{B}\hat{D} = \hat{G}\hat{E}\hat{D}$ διότι είναι παραπληρωματικές ζων
 \hat{B}_1 & \hat{E}_1
 Άρα $\triangle KBD = \triangle DEG$
 $\hookrightarrow BK = EG$ (3)
 $\hookrightarrow DK = DG$ (4)

Γ3. α. Αφού $AB = AE$ το A ισοπέχει από τα B & E .
 Αφού $BD = DE$ το D ισοπέχει από τα B & E .
 Άρα η DA μεσοκάθετος της BE .
 β. Το $\triangle K\Gamma$ είναι ισοσκελές διότι $AB = AE$ & $BK = EG$
 άρα (3), η AM είναι διχοτόμος οπότε θα είναι
 διάμεσος & ύψος. Άρα το M μέσο του $K\Gamma$.
 γ. Το $\triangle K\hat{D}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές διότι $DK = DG$ άρα (4)
 η DM διάμεσος, άρα και διχοτόμος της $\hat{K}\hat{A}\hat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (A, ρ) και η AN η οποία είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}A\hat{G}$. Προεκτείνουμε τις AB και AG κατά $BD=GE=\rho$ αντίστοιχα.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το AN είναι απόστημα της χορδής $B\Gamma$. (Μον. 4)

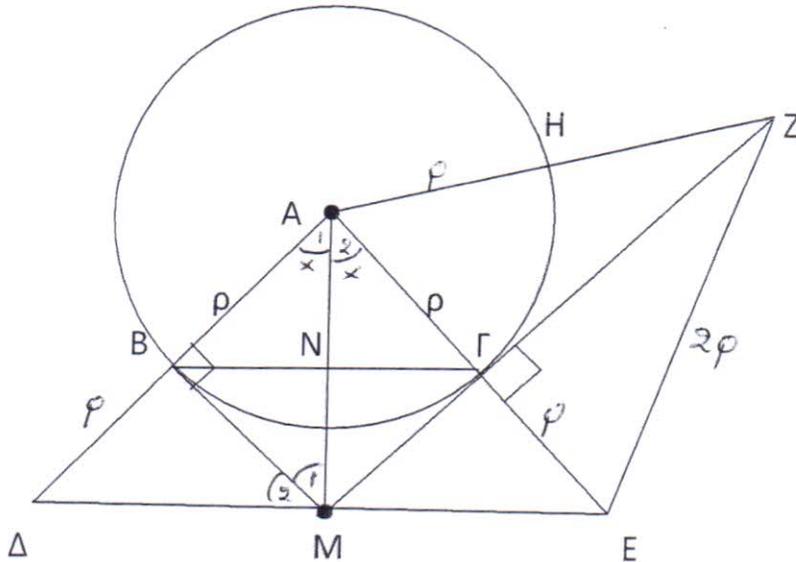
Δ2. Να αποδείξετε ότι $AM \perp DE$. (Μον. 6)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η MB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}M\hat{D}$. (Μον. 6)

Δ4. Αν προεκτείνουμε την $M\Gamma$ κατά τμήμα GZ ώστε $EZ=2\rho$ να αποδείξετε ότι

α. $ZH=\rho$ και ότι το $\hat{A}Z\hat{E}$ τρίγωνο είναι ισόπλευρο. (Μον. 5)

β. οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου $\hat{A}\hat{D}\hat{E}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μον. 4)



Δ1. Το $\hat{A}B\hat{G}$ είναι ισοσκελές, $AB=AG=\rho$, η AN διχοτόμος άρα διόμωτος & ύψος. Άρα $AN \perp B\Gamma$ οπότε AN απόστημα στη $B\Gamma$.

Δ2. Το $\hat{A}D\hat{E}$ είναι ισοσκελές διότι $AD=AE=2\rho$ η AM διχοτόμος της \hat{A} οπότε AM ύψος στη DE . Άρα $AM \perp DE$.

Δ3. Ν.Δ.Ο $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$: Συγκρίνω $\hat{A}M\hat{B}$ $\hat{M}B\hat{D}$ ορθογ. } Άρα $\hat{A}M\hat{B} = \hat{M}B\hat{D}$
 $MB = MB$ κοινή } οπότε $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
 $AB = BD = \rho$.

Δ4.α) Στο $\hat{A}Z\hat{E}$ η $Z\Gamma$ είναι ύψος και διάμετρος οπότε το $\hat{A}Z\hat{E}$ είναι ισοσκελές με $AZ=ZE=2\rho$. Όμως $AZ=AH+HZ$
 $\Leftrightarrow 2\rho = \rho + HZ \Leftrightarrow HZ = \rho$. (βέβαιως: Σύγκριση $\hat{A}\hat{G}\hat{Z}$, $\hat{G}\hat{E}\hat{Z}$).

Άρα $AE=EZ=AZ=2\rho$ το $\hat{A}Z\hat{E}$ ισόπλευρο

β) AM μεσοκάθετος της DE , $M\Gamma$ μεσοκάθετος της AE και MB μεσοκάθετος της AD , οπότε διέρχονται από το ίδιο σημείο.