ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

πρότυπο

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

10/02/2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω P(x) ένα πολυώνυμο του x και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν π(x) είναι το πηλίκο και υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο (x-ρ), τότε :

α. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το (x-ρ). [Μον 1]

$P(x) = (x-\rho)\pi(x) + \upsilon(x)$

β. Το υπόλοιπο υ(x) είναι :

Α. Πάντοτε πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το P(x).

Β. Πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Γ. Σταθερό πολυώνυμο.

Δ. Πάντοτε το μηδενικό πολυώνυμο. [Μον 1]

γ. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το (x-ρ) είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου P(x) για x=ρ. Είναι δηλαδή υ= P(ρ). [Μον 6]

Απόδειξη Σχ. βιβλίου Σελ 134

Α2. α. Τι ονομάζουμε μονώνυμο και τι πολυωνύμου του x; [Μον 2]

β. Τι ονομάζουμε ρίζα ενός πολυωνύμου P(x) και τι αριθμητική τιμή ; [Μον 2]

Θεωρία Σχ. Βιβλίου Σελ. 128 και 129

Α3. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ...ίδιο ημίτονο και ...αντίθετο συνημίτονο.

β. Οι αντίθετες γωνίες έχουν ...αντίθετο ημίτονο και ..... ίδιο συνημίτονο.

γ. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό μ και το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό ν με μ>ν, τότε το πολυώνυμο P(x)Q(x) έχει βαθμό ...μ+ν...

ενώ το πολυώνυμο P(x)+Q(x) έχει βαθμό ..μ. [Μον 3]

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Σ **α.** Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το(x-ρ) αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x) , δηλαδή αν P(ρ)=0

Λ β. Έστω P(χ) σταθερό πολυώνυμο και P(2)=5.Τότε το P(-2)= - 5.

Λ γ. Αν ένα πολυώνυμο P(χ) έχει ρίζα τον αριθμό 2 ,τότε διαιρείται με το x+2.

Σ δ. Αν ένα πολυώνυμο P (x) διαιρούμενο με το Q (x) δίνει υπόλοιπο 0, με το βαθμό του P (x) να είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του Q (x), τότε κάθε ρίζα του Q (x) είναι και ρίζα του P (x)

Σ ε. Το πολυώνυμο $P(x)=x^{2018}-1$ έχει ρίζα τον αριθμό -1. [Μον 10]

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (5α + 2β)\, x^3 + 2x^2 + (3α + 2)x + 8$

και $Q(x) = (3α + β)\, x^3 + 2x^2 - (α + β)x + 8$

Να βρεθούν τα α, β, αν

i) τα P(x) και Q(x) είναι ίσα [Μον. 5]

ii) τα P(x) και Q(x) είναι 2ου βαθμού [Μον. 4]

iii) το P(x) έχει παράγοντα το(x- 1) και το Q(x) έχει ρίζα το x = 2. [Μον. 5]

i) $\left.\begin{array}{l} 5a+2b=3a+b \\ \text{κ } 3a+2=-a-b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+b=0 \\ 4a+b=-2 \end{array}\right\}\begin{array}{l}(-1)\\ \Leftrightarrow\end{array} \left.\begin{array}{l} -2a-b=0 \\ 4a+b=-2 \end{array}\right\}(+)$

$2a=-2 \Leftrightarrow a=-1$ κ $b=2$

ii) $\left.\begin{array}{l} 5a+2b=0 \\ 3a+b=0 \end{array}\right\}\begin{array}{l}\Leftrightarrow\\ (-2)\end{array} \left.\begin{array}{l} 5a+2b=0 \\ -6a-2b=0 \end{array}\right\}(+)$

$a=0$ κ $b=0$

iii) $\left.\begin{array}{l} P(1)=0 \Leftrightarrow 5a+2b+2+3a+2+8=0 \\ P(2)=0 \Leftrightarrow (3a+b)\cdot 8+2\cdot 2^2-(a+b)\cdot 2+8=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 8a+2b=-12 \\ 24a+8b+8-2a-2b+8=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} 4a+b=-6 \\ 22a+6b=-16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4a+b=-6 \\ 11a+3b=-8 \end{array}\right\}\begin{array}{l}(-3)\\ \Leftrightarrow\end{array} \left.\begin{array}{l} -12a-3b=18 \\ 11a+3b=-8 \end{array}\right\}(+)$ $a=-10$ $b=34$

Β2. α. Να βρείτε το μ∈R ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του: $P(x) = 8μ\, x^3 + (μ + 1)\, x + 3$ με το (2x - 1) να είναι το 6 . [Μον. 4]

β. Για μ=2 να αποδείξετε ότι P(2018)+ P(-2018)=6 [Μον. 4]

α. $8\mu x^3+(\mu+1)x+3 \;\big|\; 2x-1$

$-8\mu x^3+4\mu x^2$ $\quad\quad 4\mu x^2+2\mu x+\frac{3\mu+1}{2}$

$4\mu x^2+(\mu+1)x+3$

$-4\mu x^2+2\mu x$

$(3\mu+1)x+3$

$-(3\mu+1)x+\frac{3\mu+1}{2}$

$\frac{3\mu+1}{2}+3$

Άρα $\frac{3\mu+1}{2}+3=6 \Leftrightarrow$

$\frac{3\mu+1}{2}=3 \Leftrightarrow$

$3\mu+1=6 \Leftrightarrow \mu=5/3$

β. Για $\mu=2$ $\quad P(x)=16x^3+3x+3$

$P(2018)+P(-2018)=16\cdot 2018^3+3(2018)+3+16(-2018)^3+3(-2018)+3$

$=\cancel{16\cdot 2018^3}+\cancel{3\cdot 2018}+3-\cancel{16\cdot 2018^3}-\cancel{3\cdot 2018}+3 \Leftrightarrow$

$P(2018)+P(-2018)=3+3=6$

Β3. Να βρείτε το πολυώνυμο P(χ) το οποίο όταν διαιρεθεί με το x^2+1,δίνει πηλίκο 3x -1 και υπόλοιπο 2x +5. [Μον. 3]

Άρα από την ταυτότητα της διαίρεσης

$P(x)=(x^2+1)\cdot(3x-1)+2x+5 \Leftrightarrow$

$P(x)=3x^3-x^2+3x-1+2x+5 \Leftrightarrow$

$P(x)=3x^3-x^2+5x+4$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = αx^3 + x^2 - βx + 2$, με κ, λ ∈R.

Γ1. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το (x-1) και η διαίρεση του P(x) με το (x-2) δίνει υπόλοιπο 12 να αποδείξετε ότι α = 2 και β = 5 [Μον. 7]

Γ2. Για α = 2 και β = 5

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο P(x) διαιρείται με το πολυώνυμο (2x-1) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. [Μον. 5]

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$. [Μον. 3]

γ) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. [Μον. 6]

δ Να λύσετε την εξίσωση $2ημ^3x - συν^2x - 5ημx + 3 = 0$ [Μον. 4]

Γ1. Παράγοντα (x-1): $P(1)=0 \Leftrightarrow α+1-β+2=0 \Leftrightarrow α-β=-3$

$P(x):(x-2)$ $υ=12$: $P(2)=12 \Leftrightarrow α\cdot 2^3+2^2-β\cdot 2+2=12 \Leftrightarrow 8α+4-2β+2=12 \Leftrightarrow 8α-2β=6 \Leftrightarrow 4α-β=3$

(Σ) $\left.\begin{matrix} α-β=-3 \\ 4α-β=3 \end{matrix}\right\} \overset{(-1)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -α+β=3 \\ 4α+β=3 \end{matrix}\right\} (+)$ $3α=6 \Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} α=2 \\ β=5 \end{matrix}}$ Σ $2-β=-3 \Leftrightarrow 2+3=β \Leftrightarrow$

Γ2 α) $α=2$ $β=5$ $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2-5x+2 & 2x-1 \\ \cline{2-2} -2x^3+x^2 & x^2+x-2 \\ \hline 2x^2-5x+2 & \\ -2x^2+x & \\ \hline -4x+2 & \\ +4x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Άρα $P(x)=(2x-1)(x^2+x-2)$

β) $P(-1)=2(-1)^3+(-1)^2-5(-1)+2=-2+1+5+2 \Rightarrow$ $\boxed{P(-1)=6}$ ή Σχήμα Horner με ρ=-1

γ) $P(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2+x-2)=0$

$2x-1=0$ ή $x^2+x-2=0$

$x=1/2$ ή $Δ=9$, $x=\frac{-1\pm3}{2}= \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

δ) $2ημ^3x-συν^2x-5ημx+3=0 \Leftrightarrow$

$2ημ^3x-(1-ημ^2x)-5ημx+3=0 \Leftrightarrow$

$2ημ^3x-1+ημ^2x-5ημx+3=0 \Leftrightarrow$

$2ημ^3x+ημ^2x-5ημx+2=0$

Από γ)

$ημx=\frac{1}{2}$ ή $ημx=1$ ή $ημx=-2$ ΑΔ.

$ημx=ημπ/6$ ή $ημx=ημ\frac{π}{2}$

$x=2κπ+π/6$ κ∈Ζ $x=2κπ+π/2$, κ∈Ζ

ή

$x=2κπ+π-π/6$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4ημα\cdot x^3 + 4συν^2α\cdot x^2 - 8x + 3+β$.

Δ1. Αν η διαίρεση του P(x) με το $\left(x+εφ\frac{3π}{4}\right)$ δίνει υπόλοιπο $-(2\,ημα-1)^2$

να αποδείξετε ότι β = 0 [Μον. 5]

Δ2. Αν το P(x) έχει για παράγοντα το (x – ημα) να βρείτε τη γωνία α αν γνωρίζουμε ότι $α \in (0, π)$. [Μον. 5]

Δ3. Για $ημα = \frac{1}{2}$ και β = 0

α. να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο P(x) παίρνει τη μορφή

$P(x) = 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 8\cdot x + 3$ και ότι έχει παράγοντα το $(x - \frac{1}{2})$ [Μον. 5]

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. [Μον. 5]

γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(συνx) = 0$ [Μον. 5]

Δ1. Αφου $εφ\frac{3π}{4} = εφ(π+\frac{π}{4}) = -εφ\frac{π}{4} = -1$ τότε $(x+εφ\frac{3π}{4}) = (x-1)$

Αρα $P(+1) = -(2ημα-1)^2 \Leftrightarrow$

$4ημα + 4συν^2α - 8 + 3 + β = -(4ημ^2α - 4ημα + 1) \Leftrightarrow$

$\cancel{4ημα} + 4συν^2α - 5 + β = -4ημ^2α + \cancel{4ημα} - 1 \Leftrightarrow$

$4συν^2α + 4ημ^2α - 5 + 1 + β = 0 \Leftrightarrow$

$4(συν^2α + ημ^2α) - 4 + β = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 + β = 0 \Leftrightarrow$

$β = 0$

Δ2. παράγοντας (x – ημα) άρα $P(ημα) = 0 \Leftrightarrow$

$4ημα\,ημ^3α + 4συν^2α\cdot ημ^2α - 8ημα + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$4ημ^4α + 4(1-ημ^2α)\cdot ημ^2α - 8ημα + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\cancel{4ημ^4α} + 4ημ^2α - \cancel{4ημ^4α} - 8ημα + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$4ημ^2α - 8ημα + 3 = 0$

Θέτω $ημα = y$: $4y^2 - 8y + 3 = 0$

$Δ = 64 - 48 = 16$

$y = \frac{8 \pm 4}{8} = \begin{cases} \frac{12}{8} = 3/2 \\ \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Αρα α $ημα = \frac{3}{2}$ ή $ημα = \frac{1}{2}$

Αδύνατο διότι $\frac{3}{2} > 0$

Άρα $ημα = ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow$

$α = 2κπ + \frac{π}{6}$ ή $α = 2κπ + π - π/6$ όμως $α \in (0,π)$

οπότε $α = π/6$ ή $α = π - π/6 = \frac{5π}{6}$

Δ3. α. Για $ημα=\frac{1}{2}$ και $β=0$

$P(x)=4\frac{1}{2}x^3+4(1-ημ^2α)\cdot x^2-8x+3+0 \Leftrightarrow$

$P(x)=2x^3+4(1-\frac{1}{4})x^2-8x+3 \Leftrightarrow$

$P(x)=2x^3+(4-1)x^2-8x+3 \Leftrightarrow$

$P(x)=2x^3+3x^2-8x+3$

παράγοντας το $(x-1/2)$: $P(1/2)=0$ ή Σχήμα Horner

2	3	-8	3	$\frac{1}{2}$
↓	1	2	-3	
2	4	-6	$\boxed{0}$	

Άρα $P(x)=(x-\frac{1}{2})(2x^2+4x-6)$

β. $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})(2x^2+4x-6)=0 \Leftrightarrow$

$x-\frac{1}{2}=0$ ή $2x^2+4x-6=0$

$x=1/2$

$x^2+2x-3=0$

$Δ=4+12=16$

$x=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$ $x=1$ ή $x=-3$

γ. $P(συνx)=0$

Άρα $συνx=\frac{1}{2}$ ή $συνx=1$ ή $συνx=-3$

ΑΔΥΝΑΤΗ αφού $-1\le συνx\le 1$

$συνx=συν0$

$συνx=συν\frac{π}{3}$ ή $x=2κπ, κ\in Z$

$x=2κπ+π/3$ ή $x=2κπ-π/3$, $κ\in Z$