ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΑΛΓΕΒΡΑΒ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

24/11/2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α. Πότε μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Θεωρία Σχ. βιβλίου: Σελ 32

β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in$ Α μέγιστο;

Θ. Σχ. βιβλίου: Σελ 33

γ. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέγεται άρτια;

Τι είδους συμμετρία παρουσιάζει ; **Μονάδες: 9**

Θεωρία Σχ. βιβλίου: Σελ 35

Α2. Να αντιστοιχίσετε τις μοίρες με τα αντίστοιχα ακτίνια.

Μοίρες	Α) 30^0	Β) 45^0	Γ) 60^0	Δ) 120^0	Ε) 150^0	ΣΤ) 135^0
rad	1. $\frac{\pi}{3}$	2. $\frac{\pi}{4}$	3. $\frac{5\pi}{6}$	4. $\frac{3\pi}{4}$	5. $\frac{\pi}{6}$	6. $\frac{2\pi}{3}$

Α -> 5 Β -> 2 Γ -> 1 Δ -> 6 Ε -> 3 ΣΤ -> 4 **Μονάδες: 3**

Α3. Η συνάρτηση $f(x) = |x-1|$, , $x \in \mathbb{R}$ είναι:

α) άρτια β) περιττή γ) γνησίως αύξουσα

δ) γνησίως φθίνουσα ε) τίποτα από τα παραπάνω **Μονάδες: 3**

Α4. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

Σ 1) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$, είναι άρτια.

Σ 2) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή τότε $f(0) = 0$.

Λ 3) Η συνάρτηση $f: [-3,3) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι άρτια.

Σ 4) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,8)$ τότε είναι γνησίως αύξουσα στο R

Σ 5) Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι το 1 τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη. **Μονάδες: 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση μια συνάρτησης f.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f. **Μονάδες: 4**

β. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή. **Μονάδες: 3**

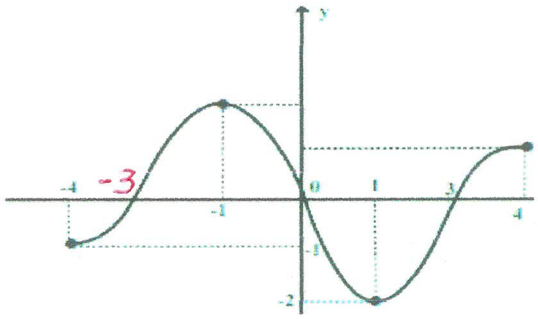
γ. Να βρεθεί το $f(-1)$.(Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας) **Μονάδες: 3**

δ. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. **Μονάδες: 4**

ε. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f. **Μονάδες: 4**

στ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$. **Μονάδες: 4**

ζ. Να λυθεί η ανίσωση: $f(x) < 0$. **Μονάδες: 3**



Β β. Η f είναι περιττή διότι είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

γ. Αφού $f(1) = -2$ τότε $f(-1) = -f(1) = -(-2) = 2$ διότι f περιττή.

α. πεδίο ορισμού $A = [-4, 4]$

Σύνολο τιμών $f(A) = [-2, 2]$

δ. Για $x \in [-4, -1]$ η f γν. αύξουσα

Για $x \in [-1, 1]$ η f γν. φθίνουσα

Για $x \in [1, 4]$ η f γν. αύξουσα

ε. Στο $x = -1$ η f έχει μέγιστο το $f(-1) = 2$

Στο $x = 1$ η f έχει ελάχιστο το $f(1) = -2$.

στ. $f(x) = 0 \iff \underbrace{x = -3}_{\text{διότι } f \text{ περιττή.}}$ ή $x = 0$ ή $x = 3$

(Σημεία τομής με $x'x$)

ζ. $f(x) < 0 \iff x \in [-4, -3) \cup (0, 3)$

(C_f κάτω από τον $x'x$)

ΘΕΜΑ Γ

$\boldsymbol{\Gamma_1}$. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - \kappa x - (\lambda - 3)$, $\quad x \epsilon \mathbb{R}$ και $g(x) = \kappa x - \frac{\lambda}{3}$, $\quad x \epsilon \mathbb{R}$.
Η C_g διέρχεται από το $A(4,1)$ και η C_f διέρχεται από το $B(-2,0)$.

Α.Να βρεθούν τα κ, λ. **Μονάδες: 4**

Β. Για $\kappa = 1$ και $\lambda = 9$,

1. Να βρεθούν τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων. **Μονάδες: 4**

2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις δύο συναρτήσεις και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα. **Μονάδες: 4**

$\boldsymbol{\Gamma_2}$.

Α. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **Μονάδες: 5**

Β. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 3\eta\mu^2\omega + \varepsilon\varphi^2\varphi = 3 \\ \eta\mu\omega + \varepsilon\varphi\varphi = 2 \end{cases}$, $\omega \epsilon \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\varphi \epsilon (\pi, \frac{3\pi}{2})$ **Μονάδες: 3**

Γ. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = -\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - 3\sigma\varphi\varphi + \eta\mu(\frac{61\pi}{2})$ **Μονάδες: 5**

Γ1 Α C_g διέρχεται $A(4,1)$: $g(4) = 1 \Leftrightarrow 1 = 4\kappa - \frac{\lambda}{3} \Leftrightarrow 12\kappa - \lambda = 3$

C_f διέρχεται $B(-2,0)$ $f(-2) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2\kappa - \lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\kappa - \lambda = -7$

$(\Sigma)\ \begin{cases} 12\kappa - \lambda = 3 \\ 2\kappa - \lambda = -7 \end{cases} \begin{matrix} \\ (-1) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\kappa - \lambda = 3 \\ -2\kappa + \lambda = 7 \end{cases} (+)$

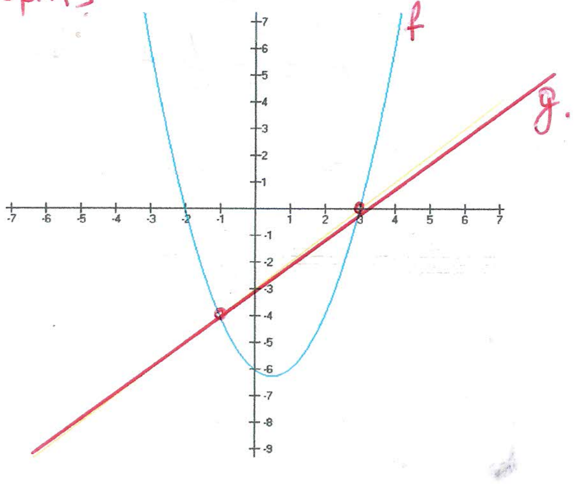
$10\kappa = 10 \Leftrightarrow \kappa = 1$ ϗ $2 \cdot 1 - \lambda = -7 \Leftrightarrow \lambda = 9$

Άρα $f(x) = x^2 - x - 6$ ϗ $g(x) = x - 3$

Β. 1. $(\Sigma)\ \begin{cases} f(x) = x^2 - x - 6 \\ g(x) = x - 3 \end{cases}$ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = x - 3 \Leftrightarrow$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$\Delta = 4 + 12 = 16$
$x = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Για $x = 3$ $g(3) = 0$ $(3,0)$
$x = -1$ $g(-1) = -4$ $(-1,-4)$ } Σημεία τομής

2. Είναι τα σημεία τομής της παραβολής $f(x) = x^2 - x - 6$ με την ευθεία $g(x) = x - 3$



Γ2.

A. $\left.\begin{array}{l}3x^2+y^2=3\\ x+y=2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}3x^2+(2-x)^2=3\\ y=2-x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}3x^2+4-4x+x^2-3=0\\ y=2-x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}4x^2-4x+1=0\\ y=2-x\end{array}$

$\left\{\begin{array}{l}(2x-1)^2=0\\ y=2-x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x=1/2\\ y=2-1/2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}x=1/2\\ y=3/2\end{array}$ λύση $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

B. $\left.\begin{array}{l}3ημ^2ω+εφ^2φ=3\\ ημω+εφφ=2\end{array}\right\}$ θέτω $ημω=x$ και $εφφ=y$

οπότε $\left.\begin{array}{l}3x^2+y^2=3\\ x+y=2\end{array}\right\}$ Άρα, από A) $\begin{array}{l}x=1/2\\ y=3/2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}ημω=\frac{1}{2}\\ εφφ=3/2\end{array}$

Γ. $ημ^2ω+συν^2ω=1 \Leftrightarrow συν^2ω=1-ημ^2ω=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$συνω=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

όμως $\frac{π}{2}<ω<π$ οπότε $συνω=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

και $εφφ\cdot σφφ=1 \Leftrightarrow σφφ=\frac{1}{εφφ} \Leftrightarrow σφφ=\frac{2}{3}$

Τότε $A=-\sqrt{3}\,συνω-3σφφ+ημ\left(\frac{61π}{2}\right)$

$A=-\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3\left(\frac{2}{3}\right)+ημ\left(\frac{60π}{2}+\frac{π}{2}\right)$

$A=\frac{3}{2}-2+ημ\left(30π+\frac{π}{2}\right)$

$A=-\frac{1}{2}+ημ(π/2)=-\frac{1}{2}+1 \Leftrightarrow A=1/2$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3 + \alpha x$, $x \epsilon \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2\,,-18)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το $\alpha = -5$. **Μονάδες: 5**
Δ2. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή. **Μονάδες: 5**
Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. **Μονάδες: 5**
Δ4. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - \frac{f(2019)}{f(-2019)} \cdot x - 6 = 0$. **Μονάδες: 4**
Δ5. Να συγκριθούν οι τιμές: $f\left(-\frac{2019}{2020}\right)$ και $f\left(-\frac{2020}{2019}\right)$. **Μονάδες: 3**
Δ6. Να λυθεί η ανίσωση: $-(2x-1)^3 - 5(2x-1) < -(x^2-4)^3 - 5(x^2-4)$. **Μονάδες: 3**

Δ1. Διέρχεται $M(2,-18)$: $f(2) = -18 \Leftrightarrow -8 + 2\alpha = -18 \Leftrightarrow$
$2\alpha = -10 \Leftrightarrow \alpha = -5$

Άρα $f(x) = -x^3 - 5x$, $A = \mathbb{R}$.

Δ2. $A = \mathbb{R}$ $f(-x) = -(-x)^3 - 5(-x) = x^3 + 5x = -f(x)$
f περιττή.

Δ3. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^3 < x_2^3$

$$\left.\begin{array}{r} -x_1^3 > -x_2^3 \\ -5x_1 > -5x_2 \end{array}\right\} (+)$$

και

$-x_1^3 - 5x_1 > -x_2^3 - 5x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$, f γν. φθίνουσα.

Δ4. $x^2 - \frac{f(2019)}{f(-2019)} x - 6 = 0$ όμως $f(-2019) = -f(2019)$ οπότε

$x^2 + x - 6 = 0$
$\Delta = 1 + 24 = 25$ και $x = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2$ ή -3 $\quad x = 2$ ή $x = -3$

Δ5. $-\frac{2019}{2020} > -1$, $-\frac{2020}{2019} < -1$

Άρα $-\frac{2020}{2019} < -\frac{2019}{2020} \xrightarrow{f \downarrow} f\left(-\frac{2020}{2019}\right) > f\left(-\frac{2019}{2020}\right)$

Δ6. $-(2x-1)^3 - 5(2x-1) < -(x^2-4)^3 - 5(x^2-4) \Longleftrightarrow$
$f(2x-1) < f(x^2-4) \xrightarrow{f \downarrow}$
$2x - 1 > x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$
Ρίζες: $\Delta = 16$, $x = \frac{2 \pm 4}{2} = 3$ ή -1

πίνακας

x		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in (-1, 3)$