ΛΥΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ 3/1/2014

ΘΕΜΑ Α

ΘΕΜΑ Β

Α. i) Αν $x \geq 1$ τότε συν(|x – 1|)= συν(x – 1)
Αν x < 1 τότε συν(|x – 1|)= συν [-(x – 1)] = συν(x – 1)
Άρα συν(|x – 1|)= συν(x – 1), για κάθε x∈R.

ii) Ισχύει συνx ≤ 1 ⇔ συνx – 1 ≤ 0, για κάθε x∈R.
Άρα ημ(|συνx – 1|) = ημ(1 – συνx)

iii) ημ$\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)$ = ημ$\left(\frac{4\pi-\pi}{8} - x\right)$ =ημ($\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{8} + x\right)$) = συν$\left(\frac{\pi}{8} + x\right)$
Άρα ημ²$(x + \frac{\pi}{8})$ + ημ²$\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)$= ημ²$(x + \frac{\pi}{8})$ + συν²$(\frac{\pi}{8} + x)$ = 1

Β. α) D = $\begin{vmatrix} \lambda+2 & 5 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 - 5 = \lambda^2 - 9$

D_x = $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 5\lambda - 35 = 5(\lambda - 7)$

D_y = $\begin{vmatrix} \lambda+2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5\lambda + 5 = 5(\lambda + 1)$

β) * Αν D ≠ 0 ⇔ λ≠ $\pm$ 3 τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{5(\lambda-7)}{\lambda^2-9}$, $y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{5(\lambda+1)}{\lambda^2-9}$, λ≠ $\pm$ 3
*Αν λ = 3 τότε το Σύστημα $\begin{cases} 5x - 5y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 5, \text{αδύνατο} \end{cases}$
*Αν λ = -3 τότε το Σύστημα $\begin{cases} -x + 5y = 5 \\ x - 5y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y = -5 \\ x - 5y = 5, \text{αδύνατο} \end{cases}$

γ) $\left|\frac{5}{x_0} - \frac{5}{y_0}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{5}{\frac{5(\lambda-7)}{\lambda^2-9}} - \frac{5}{\frac{5(\lambda+1)}{\lambda^2-9}}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^2-9}{\lambda-7} - \frac{\lambda^2-9}{\lambda+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{(\lambda^2-9)(\lambda+1-\lambda+7)}{(\lambda-7)(\lambda+1)}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{8(\lambda^2-9)}{(\lambda-5)(\lambda+1)}\right| = 1 \overset{\substack{\lambda\neq 5,1 \\ \lambda\neq\pm 3}}{\Longleftrightarrow}$

$\frac{8(\lambda^2-9)}{(\lambda-5)(\lambda+1)} = 1 \Leftrightarrow$
8(λ² – 9) = λ² – 5λ + λ - 5⇔
7λ² + 4λ – 67 = 0
Δ = β² – 4αγ = 16 + 28·67=1892
$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{1892}}{10}$

ή

$\frac{8(\lambda^2-9)}{(\lambda-5)(\lambda+1)} = -1 \Leftrightarrow$
8λ² – 72 = -λ² + 5λ - λ 5 5⇔
9λ² - 4λ – 79 = 0
Δ = β² – 4αγ = 16 + 2844 = 2860
$\lambda_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{2860}}{14}$

ΘΕΜΑ Γ

α) A(0, -2)∈ ⇔ f(0) = -2 ⇔ γ = -2
β) f άρτια στο R άρα για κάθε x∈R f(-x) = f(x) ⇔ αx² – βx + γ = αx² + βx + γ ⇔ β = 0
γ) Για γ = -2, β = 0, f(x) = λx² – 2 , x∈R
f(1) = λ – 2, f(-1) = λ – 2
Άρα το (Σ) γίνεται: $\begin{cases} (\lambda+2)x - y = \lambda \\ 3x + (\lambda-2)y = 1 \end{cases}$

D = $\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 3 & \lambda-2 \end{vmatrix}$ = $\lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1$

$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$

$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 2 - 3\lambda = 2 - 2\lambda = 2(1 - \lambda)$

* Αν $\lambda \neq \pm 1$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{(\lambda-1)}{\lambda^2-1} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, $y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda^2-1} = \frac{-2}{\lambda+1}$

*Αν λ = 1 τότε το Σύστημα $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x - y = 1 \Leftrightarrow y = 3x - 1$, $x \in R$

Αόριστη με άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y) = (x, 3x - 1)$, $x \in R$

*Αν λ = -1 τότε το Σύστημα $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases}$, αδύνατο

iii) $x_0 + y_0 = 3 \Leftrightarrow \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2-1} + \frac{2(1-\lambda)}{\lambda^2-1} = 3 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 + 2(1-\lambda) = 3\lambda^2 - 3 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 - 2(\lambda-1) - 3(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$

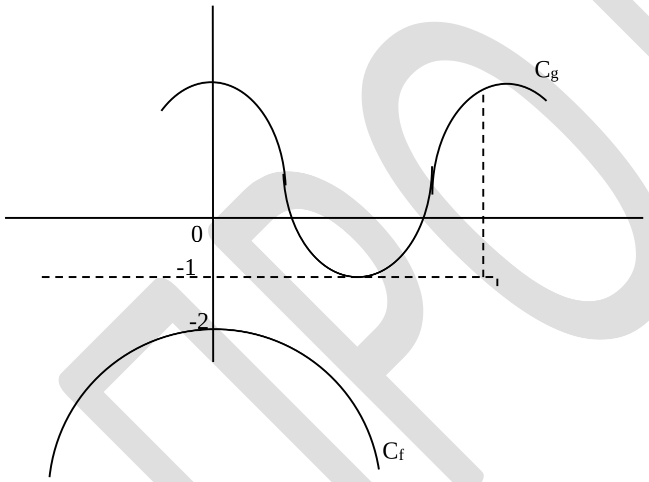
$(\lambda - 1)[\lambda - 1 - 2 - 3\lambda - 3] = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(-2\lambda - 6) = 0$

λ = 1 απορ.   ή   λ = 3 δεκτή

iv) Για λ = -3, $f(x) = -3x^2 - 2$ και η παραβολή έχει μέγιστο την κορυφή της $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}) = (0, -2)$

v) $3x^2 + συνx + 2 = 0 \Leftrightarrow συνx = -3x^2 - 2$

Θεωρώ g(x) = συνx τότε η παραπάνω εξίσωση ισοδύναμα γίνεται g(x) = f(x). Άρα λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής C_f, C_g



Παρατηρώ ότι C_f δεν τέμνει C_g σε κανένα σημείο. Άρα f(x) = g(x) αδύνατη εξίσωση στο R.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

α) $w = z + \bar{z}i$

$i\bar{w} = i\overline{(z + \bar{z}i)} = i(\bar{z} - iz) = \bar{z}i - i^2 z = z + i\bar{z} = w \Leftrightarrow i\bar{w} = w$

β) $(\frac{w}{|w|})^{2014} + (\frac{|w|}{w})^{2014} = [(\frac{w}{|w|})^2]^{1007} + [(\frac{|w|}{w})^2]^{1007} = (\frac{w^2}{|w|^2})^{1007} + [\frac{|w|^2}{w^2}]^{1007} = (\frac{w^2}{w\bar{w}})^{1007} + (\frac{w\bar{w}}{w^2})^{1007} =$

$= (\frac{w}{\bar{w}})^{1007} + (\frac{\bar{w}}{w})^{1007} \xlongequal[\text{και}\ \frac{\bar{w}}{w} = \frac{1}{i} = -i]{\alpha)\ \frac{w}{\bar{w}} = i} i^{1007} + (-i)^{1007} = i^{1007} - i^{-1007} = 0$

γ) $w \in R \Leftrightarrow z(1 + i) \in R$

$w \in R \Leftrightarrow$

$w = \bar{w} \Leftrightarrow$

$z + \bar{z}i = \bar{z} - iz \Leftrightarrow z + \bar{z}i - \bar{z} + iz = 0 \Leftrightarrow \bar{z} + iz = \bar{z} - \bar{z}i \Leftrightarrow z(1 + i) = \bar{z}(1-i) \Leftrightarrow z(1 + i) = \overline{z(1 + \iota)} \Leftrightarrow z(1 + i) \epsilon R$.

δ) $w^2 + 3w = 2\bar{w}^2 - 3 \Leftrightarrow w^2 + 3w = 2\left(\frac{w}{i}\right)^2 - 3 \Leftrightarrow w^2 + 3w = -2w^2 - 3 \Leftrightarrow 3w^2 + 3w + 3 = 0 \Leftrightarrow w^2 + w + 1 = 0$

$\Delta = -3 < 0$,

$w_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ $\begin{matrix} w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{matrix}$

ε) Από σχέση (1) για $z = 1$ και $z = 2 + 3i$ διαδοχικά παίρνουμε:

$w_1 = 1 + i$, $w_2 = 2 + 3i + (2 - 3i)i = 2 + 3i + 2i + 3 = 5 + 5i$

$| w_1 + w_2| = |1 + I - (5 + 5i)| = | -4 - 4i| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

στ) $w^{2\nu} - |w|^{2\nu} = |w|^{2\nu} - \bar{w}^{2\nu} \Leftrightarrow$ Αφού $z \neq 0$ και $w \neq 0$ και άρα $|w| \neq 0$

$\left(\frac{w}{|w|}\right)^{2\nu} - 1 = 1 - \left(\frac{\bar{w}}{|w|}\right)^{2\nu} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{w}{|w|}\right)^2\right]^{\nu} + \left[\left(\frac{\bar{w}}{|w|}\right)^2\right]^{\nu} = 2 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{w^2}{w\bar{w}}\right)^{\nu} + \left(\frac{\bar{w}^2}{w\bar{w}}\right)^{\nu} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{w}{\bar{w}}\right)^{\nu} + \left(\frac{\bar{w}}{w}\right)^{\nu} = 2 \overset{a)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{1}{i}\right)^{\nu} + (i)^{\nu} = 2 \Leftrightarrow$

$i^{\nu} + (-i)^{\nu} = 2$

Αν $\nu = 4\kappa$ τότε $i^{4\kappa} + (-i)^{4\kappa} = (i^4)^{\kappa} + ((-i)^4)^{\kappa} = 2$

Αν $\nu = 4\kappa + 1$ τότε $i^{4\kappa+1} + (-i)^{4\kappa}(-i) = i - i = 0$

Αν $\nu = 4\kappa + 2$ τότε $i^{4\kappa+2} + (-i)^{4\kappa}(-i)^2 = i^2 + i^2 = -2$

Αν $\nu = 4\kappa + 3$ τότε $i^{4\kappa+3} + (-i)^{4\kappa}(-i)^3 = i^3 - i^3 = 0$

Άρα Αν $\nu = 4\kappa$, $\kappa \neq 0$ ισχύει.