ΛΥΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 20/10/2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. i) Το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν οι ευθείες τέμνονται.
ii) Το σύστημα είναι αδύνατο όταν οι ευθείες είναι παράλληλες.
iii) Το σύστημα είναι αόριστο όταν οι ευθείες ταυτίζονται.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου: i) Σελ 31   ii) Σελ. 32   iii) Σελ 33

Α3. 1→Λ, 2→Σ, 3→Λ, 4→Σ, 5→Σ, 6→Λ, 7→Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(\lambda + 1)x + y = 1$
$2\lambda x + \lambda y = 1$

Υπολογίζουμε: $D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1) - 2\lambda = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda$
$D = \lambda(\lambda - 1)$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1 \Rightarrow D_x = \lambda - 1$

$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 1 - 2\lambda = -\lambda + 1 \Rightarrow D_y = -(\lambda - 1)$

Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση
$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{1}{\lambda}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)} = -\frac{1}{\lambda}$, $(x, y) = \left(\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}\right)$

Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$

Για $\lambda = 0$: $x + y = 1$
$0x + 0y = 1$
Αδύνατο

Για $\lambda = 1$: $2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x$
$2x + y = 1$
Αόριστο με λύσεις $(x, y) = (x, 1 - 2x)$, $x \in R$.

Β2. $x^3 + 8y^4 = 0$
$3x^3 + 20y^4 = -4$

<u>Α΄ τρόπος:</u> Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

$\left.\begin{matrix} x^3+8y^4=0 \\ 3x^3+20y^4=-4 \end{matrix}\right\} \overset{(-3)}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{matrix} -3x^3-24y^4=0 \\ 3x^3+20y^4=-4 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Longleftrightarrow} -4y^4 = -4 \Leftrightarrow y^4 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -1$

Για $y^4 = 1$: $x^3 + 8\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -2$. Άρα λύσεις (x, y): (-2, 1) και (-2, -1)

<u>Β΄ τρόπος:</u> θέτω $x^3 = \alpha$ και $y^4 = \beta$

Άρα $\left.\begin{matrix} \alpha+8\beta=0 \\ 3\alpha+20\beta=-4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \cdots \begin{matrix} \alpha = -8 \\ \beta = 1 \end{matrix}$

Οπότε $x^3 = -8$ και $y^4 = 1$.
$x = -2$ και $y = 1$ ή $y = -1$ Άρα λύσεις (x, y): (-2, 1) και (-2, -1).

Β3. Αφού το (Σ) $\begin{cases} (2\alpha+1)x - (\beta-\alpha-4)y = 1 \\ (2\alpha+b)x - (\alpha-2\beta)y = 2 \end{cases}$ έχει λύση (x, y) = (1, -1) τότε για x = 1 και y = -1 επαληθεύεται.

Άρα $\left.\begin{matrix} (2\alpha+1)\cdot 1 - (\beta-\alpha+4)(-1) = 1 \\ (2\alpha+\beta)\cdot 1 + (\alpha-2\beta)(-1) = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2\alpha+1+\beta-\alpha-4 = 1 \\ 2\alpha+\beta-\alpha+2\beta = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha+\beta = 4 \\ \alpha+3\beta = 2 \end{matrix}\right\} \overset{(-1)}{\Longleftrightarrow}$

$$\left.\begin{array}{r}-\alpha-\beta=-4\\ \alpha+3\beta=2\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow} 2\beta=-2 \Leftrightarrow \beta=\ -1$$

Για β = -1: α – 1 = 4 ⇔ α = 5. Άρα **α = 5** και **β = -1**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) ε_1 : Μορφή y = αx + β με α = 2 διότι συντελεστής διεύθυνσης 2.

Διέρχεται από (0, -1) : x = 0, y = -1 ⇔ -1 = 2·0 + β⇔ β = -1

Άρα ε_1: y = 2x -1 ⇔ -2x + y + 1 = 0

ε_2: Μορφή y = αx + β:

Διέρχεται από (-2, 2) : x = -2, y = 2 ⇔ 2 = α·(-2) + β⇔ -2α + β = 2

Διέρχεται από (2, -2) : x = 2, y = -2 ⇔ -2 = α·2 + β ⇔ 2α + β = -2

(Σ): $\left.\begin{array}{r}-2\alpha+\beta=2\\ 2\alpha+\beta=-2\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow} 2\beta=0 \Leftrightarrow \beta=0 \text{ και } \alpha=\ -1$

Άρα ε_2: y = -x

β) (Σ) : $\begin{array}{r}-2x\ +\ y\ =\ -1\\ x+y=0\end{array}$

D = $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}$ = -2 – 1 ⇔ D = -3

D_x = $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ = – 1 ⇔ D_x = -1

D_y = $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$ = + 1 ⇔ D_y = 1

γ) |-2x + y + 1| + $(x + y)^2$ = 0 Άθροισμα μη αρνητικών αριθμών οπότε:

$$\left.\begin{array}{r}-2x\ +\ y+1=\ 0\\ x+y=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{r}-2x\ +\ y=-1\\ x+y=0\end{array}$$

Άρα x = x = $\frac{D_x}{D}$ =$\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$ και y = $\frac{D_y}{D}$ =$\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$

Γ2.

α) Αφού D = D_x + 3D_y και το σύστημα έχει μοναδική λύση τότε D ≠ 0, οπότε διαιρώ με D

$\frac{D}{D}=\frac{D_x}{D}+\frac{3D_y}{D}$ ⇔ 1 = x_0 + 3y_0 ⇔ x_0 + 3y_0 = 1

β) $x_0^2-9y_0^2=(x_0+3y_0)(x_0-3y_0)=1\cdot(x_0-3y_0)=\frac{D_x}{D}-3\frac{D_y}{D}=\frac{D_x-3D_y}{D}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

α) Λύνω το σύστημα : $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2\ =2\kappa\\ y=x+\sqrt{2}\kappa\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x^2+(x+\sqrt{2}\kappa)^2\ =2\kappa\\ y=x+\sqrt{2}\kappa\end{array}\right\}$

Άρα x^2 + x^2 + $2\sqrt{2}$κ·x + $2\kappa^2$ – 2κ = 0 ⇔ $2x^2$ + $2\sqrt{2}$κ·x + $2\kappa^2$ – 2κ = 0 ⇔x^2 + $\sqrt{2}$κ·x + κ^2 – κ = 0

Για να έχει μοναδική λύση πρέπει Δ = 0 ⇔ β^2 – 4αγ = 0 ⇔ $(\sqrt{2}\kappa)^2$ – 4(κ^2 – κ) = 0 ⇔ $2\kappa^2$ – $4\kappa^2$ + 4κ = 0 ⇔ -$2\kappa^2$ + 4κ = 0 ⇔ -2κ(κ – 2) = 0 ⇔ κ = 0 Απορρ. ή **κ = 2**

β) Για κ = 2 $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=4\\ y=x+2\sqrt{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x^2+\left(x+2\sqrt{2}\right)^2=2\kappa\\ y=x+2\sqrt{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

Άρα x^2 + $2\sqrt{2}$x + 2 = 0 ⇔ $(x + \sqrt{2})^2$ = 0 ⇔ x = -$\sqrt{2}$ και y = -$\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

Κοινό σημείο (x, y) = (-$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)

Δ2. Παραβολή f(x) = αx^2 + βx + γ

i) – Στο (-∞, 0] η f γνησίως αύξουσα άρα έχει κορυφή στο x = 0, οπότε $\frac{-\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$.

- Η C_f τέμνει τον y'y στο y = 2 , (0, 2): f(0) = 2 ⇔ γ = 2
- Διέρχεται από το Α(2, 1) : f(2) = 1 ⇔ $\alpha \cdot 2^2 + 2 = 1 \Leftrightarrow 4\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{4}$

Άρα **$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$**

ii) Τα σημεία Α(2, 1) και Β(-2, 1) είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y οπότε ανήκουν στην C_f.

Δ3.

I) (Σ) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + (-\frac{1}{4}x^2 + 2)^2 = 4 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{16}x^4 - 2\frac{1}{4}x^2 \cdot 2 + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{16}x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{16}x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Για x = 0, y = 2 διότι πρέπει να επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

II) Το κοινό σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με την παραβολή $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$ είναι σημείο (0,2) το οποίο είναι η κορυφή της παραβολής.

III) Οι διαγώνιες ΑΟΒΓ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται στο Μ(0,1). Άρα ΑΟΒΓ ρόμβος και Ε = $2(\overset{\Delta}{BOA})$ όπου $(\overset{\Delta}{BOA}) = \frac{1}{2}(BA) \cdot MO = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$ τ.μ.

Άρα Ε = 2 · 2 = 4 τ.μ.