ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
4/1/2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δοθεί ο ορισμός της γνησίως αύξουσας συνάρτησης σ'ένα διάστημα Α.

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται άρτιο.

Α3. Να χαρακτηρίσετε το Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις.
1. Ο κύκλος C_1: $x^2+y^2=1$ και η παραβολή $y=x^2+1$ δεν έχουν κοινά σημεία.
2. Αν σ'ένα τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^o$) και όχι ισοσκελές ισχύει: $ημ^2Β+συν^2Γ=1$.
3. Αν $συν(x-\frac{\pi}{2})+ ημx = 0$ τότε $ημx = 0$
4. Η ευθεία $y= -x +1$σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x΄x
5. Η γραφική παράσταση της $f(x)= συνx$ είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (συνα - 1)^2x^2 + (ημα + 1)^2x - 1$ $α,x \in R$.

Β₁. Να δικαιολογήσετε γιατί ο αριθμός 1 δεν μπορεί να είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

Β₂. Αν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου P(x) για x = 1 ισούται με 3 να βρεθεί ο $α \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Β₃. Για $α = \frac{\pi}{4}$ να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$K = \frac{ημ(5\pi+\alpha)συν(7\pi-\alpha)ημ(\frac{5\pi}{2}-\alpha)συν(\frac{7\pi}{2}+\alpha)}{σφ(5\pi+\alpha)ημ(7\pi-\alpha)συν(\frac{5\pi}{2}-\alpha)σφ(\frac{7\pi}{2}+\alpha)}$$ ισούται με $-\frac{1}{2}$.

Β₄. Να λυθεί η εξίσωση $[συν^2x - 2 + 2ημ^2x] = K$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = z + \frac{2}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$

Γ₁. Να λυθεί η εξίσωση f(z) = 2

Γ₂. Αν $z_1 = 1 + i$ είναι μία λύση της εξίσωσης του $Γ_1$ ερωτήματος. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(z_1^{2012} + z_2^{2012}) \in R$.

Γ₃. Αν $Im(f(z)) = 0$ τότε $z \in R$ ή $|z| = \sqrt{2}$

Γ4. Αν z_1, z_2 οι ρίζες του $Γ_1$ ερωτήματος να υπολογιστεί η παράσταση Κ= $\dfrac{(z_1+z_2)^3 - i^{2012}}{z_1^4 z_2^4 - 2i^{-4}}$

Γ5. Αν $f^{2012}(z) = 1 - i^{64}$ να αποδείξετε ότι $z = \pm\sqrt{2i}$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ$, $x \in R$, α, β, γ, $δ \in R$ και $α \neq 0$ και $f(x) = 2[ημ^2(\frac{3π}{2} - x) - 1] + 3ημ(\frac{π}{2} - \frac{x}{2}) + 2ημ^2 x$, $x \in R$.

Δ1. Αν για την συνάρτηση g ισχύουν οι παρακάτω πληροφορίες

- Η εξίσωση g(x) = 0 έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
- Το σημείο Α(0, 3) ανήκει στη γραφική παράσταση της g.
- Η συνάρτηση g είναι άρτια στο R.
- Η γραφική παράσταση της g τέμνει την οριζόντια ευθεία ε: y=4 σε σημείο με τετμημένη το 1.

Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 + 3$, $x \in R$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3συν\frac{x}{2}$, $x \in R$.

Δ3. Να βρείτε :

α) Την περίοδο T της συνάρτησης f.
β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της fκαθώς και οι θέσεις των ακρότατων αυτής στη διάρκεια μιας περιόδου της.
γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.
δ) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f στο διάστημα [-T,T)
ε) Να βρείτε το εύρος τιμών της παραμέτρου $λ \in R$ ώστε η εξίσωση f(x) = λ να έχει λύση στο R.
στ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x) = λ, $λ \in R$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ στο διάστημα [-T,T)
ζ) Να λυθεί η εξίσωση f(x) =g(x) στο R

ΘΕΜΑ Ε

Ε1 Δίνονται α πολυώνυμα $P(x)=(λ + 1)x^2-(λ^2 +λ)x+ λ^2+3λ+2$ και $Q(x)=(2λ +1)x^2 + 2$.
α) Να βρείτε τις τιμές του $λ \in R$ για τις οποίες το πολυώνυμο P(x) είναι μηδενικό.
β) Να βρείτε τις τιμές του $λ \in R$ για τις οποίες τα 2 πολυώνυμα είναι ίσα.
γ) Για λ = 1 βρείτε τις παραστάσεις:
i) 2P(x) – Q(x)   ii) P(x) ·Q(x)   iii) P(3) και Q(1)

Ε2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 + 3συν\frac{x}{2}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f(x).
β) Να βρείτε την περίοδο της f(x).
γ) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.
δ) Να λύσετε την εξίσωση: f(x) = -1.
ε) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x) - f(x-\frac{π}{3}) = 0$.