

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ 21/10/2012

### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να δοθεί ο ορισμός της γνησίως αύξουσας συνάρτησης σ' ένα διάστημα  $\Delta$ .  
(Μον. 10)
- A2.** Να δοθεί ο ορισμός του ολικού ελαχίστου.  
(Μον. 5)
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος)
1. Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι ως προς τον άξονα  $y'y$ .
  2. Αν η  $f$  ορίζεται σ' ένα σύνολο  $A$  και ισχύει  $f(-x) = f(x)$  στο  $A$  τότε η  $f$  είναι άρτια.
  3. Αν σ' ένα γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$  προκύψει  $D=0$  τότε αυτό είναι κατ' ανάγκη αδύνατο.
  4. Αν  $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + x + 6}$ ,  $x \in [-2, 3]$  τότε  $f(3) = \sqrt[3]{18}$ .
  5. Η  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R} - \{-1\}$
  6. Αν  $f(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in A$  τότε ο αριθμός 1 αποτελεί σίγουρα το ολικό μέγιστο της  $f$  στο  $A$ .
  7. Δίνεται  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} + 3x, & x < 0 \end{cases}$  τότε διπλάσιο της αριθμητικής τιμής της  $f$  στο  $x=0$  μειωμένο κατά το τριπλάσιο της αριθμητικής τιμής της  $f$  στο  $x=-1$  ισούται με 10.
  8.  $\left| \frac{x-2x}{1-x} \right| < -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
  9. Το σύστημα  $\begin{cases} \lambda x + y = -2 \\ x + \lambda y = 1 + \lambda \end{cases}$  για κάθε  $\lambda=1$  είναι αδύνατο.
  10. Αν για ένα γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$  ισχύει  $(D-1)^2 + (D_x-2)^2 + D_y^2 = 0$  τότε αυτό έχει σίγουρα μοναδική λύση την  $(x_0, y_0) = (2, 0)$  (Μον. 10)

### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \frac{4|x|}{x^2 + 4} \quad \text{ii) } g(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad \text{iii) } h(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4} - 1}{|x| - 3} \quad (\text{Μον. 9})$$

iv) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $h$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $y'y$ . (Μον. 1)

**B2.** Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} (\lambda - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda + 2)y = 5 \end{cases}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- 1) Να βρεθούν οι ορίζουσες  $D$ ,  $D_x$ ,  $D_y$
- 2) Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση όταν  $\lambda \neq 3$  και  $\lambda \neq -3$ .
- 3) Να βρεθεί για ποια τιμή του  $\lambda$  το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και να γραφεί η μορφή των λύσεων αυτών. (Μον. 15)

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^3 - \alpha$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = x^2 + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

i) Αν το σημείο  $A(0, -1)$  είναι σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  και η γραφική παράσταση της  $g$  τέμνει την κατακόρυφη ευθεία  $\varepsilon: x=1$  σε σημείο με τεταγμένη το μηδέν να δείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = -1$ . (Μον. 4)

Για  $\alpha=1$  και  $\beta=-1$

ii) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ . (Μον. 5)

iii) Να δείξετε ότι  $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ . (Μον. 5)

iv) Για ποιες τιμές του  $x$  η  $C_h$  είναι πάνω από την ευθεία  $\varepsilon: y=1$ . (Μον. 5)

v) Να αποδείξετε με γεωμετρικό τρόπο (σχήμα) ότι η  $C_g$  της  $g(x) = x^2 - 1$  εφάπτεται στην  $\varepsilon: y=-1$  στο σημείο  $A(0, -1)$ . (Μον. 3)

vi) Τι είδος μετατόπιση πρέπει να υποστεί η  $C_g$  της  $g(x) = x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ώστε να έχει κορυφή το σημείο  $B(3, 1)$  και ποιος θα είναι ο τύπος της νέας αυτής συνάρτησης. (Μον. 3)

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: y=2x - 5$  και  $\varepsilon_2: y=(\lambda-1)x+2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Δ1.** i) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  οι  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες και κάθετες αντίστοιχα. (Μον. 4)

ii) Για  $\lambda=2$ , να δείξετε ότι το σύστημα των δύο ευθειών έχει μοναδική λύση. (Μον. 4)

iii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε το σύστημα να γίνει αόριστο. (Μον. 4)

iv) Να βρεθούν τα σημεία τομής της  $\varepsilon_1: y=2x - 5$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  καθώς και το εμβαδό που περικλείεται από αυτή και τους άξονες. (Μον. 4)

**Δ2.** Αν οι εξισώσεις των δύο ευθειών για  $\lambda=2$  παριστάνουν δύο τεμνόμενους δρόμους να διαπιστώσετε ότι οι πόλεις  $A(5, 5)$  και  $B(-3, -1)$  βρίσκονται αντίστοιχα πάνω στους δρόμους αυτούς, στη συνέχεια να βρείτε πόσο κόστισε η κατασκευή του δρόμου που θα συνδέει τις πόλεις  $A, B$  αν για κάθε Km το κόστος είναι 5000€; (Μον. 6)

**Δ3.** Αν ο δήμαρχος για την κατασκευή του παραπάνω δρόμου διαθέτει μόνο 35000€ πόσο πρέπει να κατεβάσει το κόστος κάθε χιλιομέτρου για να είναι εντός προϋπολογισμού; (Μον. 3)