ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

πρότυπο

ΑΠΟΣΤΟΛΙΔΗΣ Χ. | ΚΡΕΜΑΣΤΑΣ Γ. | ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ. | ΤΑΜΠΟΣΗ Β. | ΤΣΙΟΥΚΑΝΗ Β.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
20/10/2013

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x, y. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά:

i. το σύστημα έχει μοναδική λύση. (Μον. 2)
ii. το σύστημα είναι αδύνατο. (Μον. 2)
iii. το σύστημα είναι αόριστο. (Μον. 2)

Α2. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α.

i. Πότε μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (Μον. 4)
ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη; (Μον. 4)
iii. Πότε μία συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$. (Μον. 4)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος)

1. Ένα γραμμικό σύστημα 2x2 έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $D_y \neq 0$.
2. Υπάρχει γραμμικό σύστημα 2x2 με τουλάχιστον 2013 λύσεις.
3. Το σύστημα (Σ) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x \cdot y = 5 \end{cases}$ είναι γραμμικό.
4. Το σύστημα (Σ) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x + y = 8 \end{cases}$ είναι αδύνατο.
5. Η εξίσωση $\sqrt{2}\,x + 3y = 5$ είναι γραμμική.
6. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A=R και γνησίως φθίνουσα στο Α. Τότε f(5)>f(2).
7. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A=(0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα. Τότε η f έχει στο x=0 ελάχιστο το f(0). (Μον. 7)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. α. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του λ το σύστημα (Σ) $\begin{cases} (\lambda + 1)x + y = 1 \\ 2\lambda x + \lambda y = 1 \end{cases}$. (Μον. 10)

β. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^3 + 8y^4 = 0 \\ 3x^3 + 20y^4 = -4 \end{cases}$. (Μον. 5)

Β2. Αν το (Σ) $\begin{cases} (2\alpha + 1)x - (\beta - \alpha - 4)\,y = 1 \\ (2\alpha + \beta)x + (\alpha - 2\beta)\,y = 2 \end{cases}$ με αγνώστους x, y έχει λύσεις (x, y) = (1, -1) να βρείτε τις τιμές των α και β. (Μον. 10)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Δίνονται δύο ευθείες ε_1, ε_2 για τις οποίες γνωρίζουμε

- η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης 2 και τέμνει τον y΄y στο -1.
- η ε_2 διέρχεται από τα σημεία Α (-2, 2) και Β (2, -2).

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $ε_1$ έχει εξίσωση -2x + y + 1 = 0 και η $ε_2$ έχει εξίσωση την y = - x. (Μον. 6)

β) Να υπολογιστούν οι ορίζουσες D, Dx, Dy του γραμμικού συστήματος που ορίζουν οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. (Μον. 6)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς xκαι y για τους οποίους ισχύει $|-2x + y + 1| + (x + y)^2 = 0$. (Μον. 5)

Γ2. Αν σ' ένα σύστημα 2x2 με αγνώστους x, yισχύει D = Dx + 3Dy και έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) να αποδείξετε ότι i) $x_0 + 3y_0 = 1$, ii) $x_0^2 - 9y_0^2 = \frac{Dx-3Dy}{D}$. (Μον. 8)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έστω κύκλος C_1 με εξίσωση $C_1 : x^2 + y^2 = 2κ$, $κ \in R^*$και η ευθεία $(ε_1)$ με εξίσωση $y = x + \sqrt{2}κ$, $κ \in R^*$.

α. Να βρείτε την τιμή του $κ \in R^*$ ώστε ο κύκλος και η ευθεία να έχουν ένα κοινό σημείο. (Μον. 5)

β. Αν κ = 2 να βρείτε το κοινό σημείο. (Μον. 5)

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $x\in R$, η οποία έχει γραφική παράσταση την παραβολή C_2 με εξίσωση $y = αx^2 + βx + γ$, $x\in R$, $α\neq 0$ για την οποία δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες.

- Στο διάστημα (-∞, 0] η συνάρτηση y = f(x) είναι γνησίως αύξουσα.
- Η C_f τέμνει τον άξονα y΄y σε σημείο με τεταγμένη 2.
- Το σημείο $Α(2,1) \in C_f$.

i. Να αποδείξετε ότι $α = -\frac{1}{4}$, β = 0, γ = 2. (Μον. 3)

ii. Να αιτιολογήσετε, χωρίς αντικατάσταση, ότι το σημείο Β (-2, 1) ανήκει επίσης στην C_f. (Μον. 1)

Δ3.i. Να λύσετε το σύστημα του κύκλου C_1 του $Δ_1$ ερωτήματος και της παραβολής C_2 του $Δ_2$ ερωτήματος όταν κ = 2, $α = -\frac{1}{4}$, β = 0, γ = 2. (Μον. 5)

ii. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα του συστήματος. (Μον. 3)

iii. Έστω Γ το σημείο στο οποίο η C_fτέμνει τον άξονα y΄y και Ο η αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος και να βρείτε το εμβαδόν του. (Μον. 3)