

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ 4/1/2013

### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να δοθεί ο ορισμός της γνησίως αύξουσας συνάρτησης σ' ένα διάστημα  $A$ .
- A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$  λέγεται άρτιο.
- A3.** Να χαρακτηρίσετε το Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις.
1. Ο κύκλος  $C_1: x^2 + y^2 = 1$  και η παραβολή  $y = x^2 + 1$  δεν έχουν κοινά σημεία.
  2. Αν σ' ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ) και όχι ισοσκελές ισχύει:  $\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 1$ .
  3. Αν  $\sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{2}) + \eta\mu x = 0$  τότε  $\eta\mu x = 0$
  4. Η ευθεία  $y = -x + 1$  σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα  $x'x$
  5. Η γραφική παράσταση της  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + (\sigma\upsilon\nu\alpha - 1)^2 x^2 + (\eta\mu\alpha + 1)^2 x - 1$ ,  $\alpha, x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να δικαιολογήσετε γιατί ο αριθμός 1 δεν μπορεί να είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ .

**B2.** Αν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου  $P(x)$  για  $x = 1$  ισούται με 3 να βρεθεί ο  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

**B3.** Για  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$K = \frac{\eta\mu(5\pi + \alpha)\sigma\upsilon\nu(7\pi - \alpha)\eta\mu(\frac{5\pi}{2} - \alpha)\sigma\upsilon\nu(\frac{7\pi}{2} + \alpha)}{\sigma\phi(5\pi + \alpha)\eta\mu(7\pi - \alpha)\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{2} - \alpha)\sigma\phi(\frac{7\pi}{2} + \alpha)}$$

ισούται με  $-\frac{1}{2}$ .

**B4.** Να λυθεί η εξίσωση  $[\sigma\upsilon\nu^2 x - 2 + 2\eta\mu^2 x] = K$

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(z) = z + \frac{2}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}^*$

**Γ1.** Να λυθεί η εξίσωση  $f(z) = 2$

**Γ2.** Αν  $z_1 = 1 + i$  είναι μία λύση της εξίσωσης του  $\Gamma_1$  ερωτήματος. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $(z_1^{2012} + z_2^{2012}) \in \mathbb{R}$ .

**Γ3.** Αν  $\text{Im}(f(z)) = 0$  τότε  $z \in \mathbb{R}$  ή  $|z| = \sqrt{2}$

Γ4. Αν  $z_1, z_2$  οι ρίζες του  $\Gamma_1$  ερωτήματος να υπολογιστεί η παράσταση  $K =$

$$\frac{(z_1 + z_2)^3 - i^{2012}}{z_1^4 z_2^4 - 2i^{-4}}$$

Γ5. Αν  $f^{2012}(z) = 1 - i^{64}$  να αποδείξετε ότι  $z = \pm \sqrt{2}i$

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta, x \in \mathbb{R}, a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  και  $a \neq 0$  και

$$f(x) = 2[\eta\mu^2(\frac{3\pi}{2} - x) - 1] + 3\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) + 2\eta\mu^2 x, x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Αν για την συνάρτηση  $g$  ισχύουν οι παρακάτω πληροφορίες

- Η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
- Το σημείο  $A(0, 3)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $g$ .
- Η συνάρτηση  $g$  είναι άρτια στο  $\mathbb{R}$ .
- Η γραφική παράσταση της  $g$  τέμνει την οριζόντια ευθεία  $\varepsilon: y=4$  σε σημείο με τετμημένη το 1.

Να αποδείξετε ότι  $g(x) = x^2 + 3, x \in \mathbb{R}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$ .

Δ3. Να βρείτε :

- Την περίοδο  $T$  της συνάρτησης  $f$ .
- Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και οι θέσεις των ακρότατων αυτής στη διάρκεια μιας περιόδου της.
- Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$ .
- Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f$  στο διάστημα  $[-T, T)$
- Να βρείτε το εύρος τιμών της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  να έχει λύση στο  $\mathbb{R}$ .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$  για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  στο διάστημα  $[-T, T)$
- Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  στο  $\mathbb{R}$

### ΘΕΜΑ Ε

Ε1 Δίνονται α πολυώνυμο  $P(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda^2 + 3\lambda + 2$  και  $Q(x) = (2\lambda + 1)x^2 + 2$ .

- Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι μηδενικό.
- Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες τα 2 πολυώνυμα είναι ίσα.
- Για  $\lambda = 1$  βρείτε τις παραστάσεις:
  - $2P(x) - Q(x)$
  - $P(x) \cdot Q(x)$
  - $P(3)$  και  $Q(1)$

Ε2. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2 + 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$

- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της  $f(x)$ .
- Να βρείτε την περίοδο της  $f(x)$ .
- Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.
- Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = -1$ .
- Να λύσετε την εξίσωση:  $f(2x) - f(x - \frac{\pi}{3}) = 0$ .