

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
3/1/2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1+\epsilon\varphi^2\omega}$. (Μον. 10)

A2. - Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ και

- Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Δ παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ ελάχιστο.

- Μπορεί να συνάρτηση f η οποία να είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ και να παρουσιάζει ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in \Delta$; (Μον. 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Υπάρχει γωνία ω για την οποία να ισχύει ταυτόχρονα $\epsilon\varphi\omega = 4$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{2}$.

β. Αν $f(x) = x^2 - 5x + 6$ τότε το σημείο $K(\frac{5}{2}, \frac{1}{4})$ αποτελεί την κορυφή της γραφικής της παράστασης.

γ. $\text{συν}(-\omega) = \text{συν}\omega$.

δ. $\text{συν}^2\omega = \frac{1}{1-\epsilon\varphi^2\omega}$.

ε. Αν f άρτια στο σύνολο A τότε το A δεν μπορεί να έχει τη μορφή $[-3, -1] \cup [1, 3]$. (Μον. 10)

ΘΕΜΑ Β

A. Να δείξετε ότι:

i) $\text{συν}(|x-1|) = \text{συν}(x-1)$, ii) $\eta\mu(|\text{συν}x-1|) = \eta\mu(1-\text{συν}x)$, iii) $\eta\mu^2(x + \frac{\pi}{8}) + \eta\mu^2(\frac{7\pi}{8} - x) = 1$ (Μον. 10)

B. Έστω το σύστημα (Σ)
$$\begin{cases} (\lambda + 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda - 2)y = 5 \end{cases}$$

α) Να βρείτε D, D_x, D_y . (Μον. 5)

β) Να λύσετε το (Σ) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μον. 5)

γ) Αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του συστήματος να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $|\frac{5}{x_0} - \frac{5}{y_0}| = 1$. (Μον. 5)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραβολή $f(x) = \lambda x^2 + \beta x + \gamma$, $\lambda \neq 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y' στο -2 να βρείτε το γ . (Μον. 2)

β. Αν η f είναι άρτια να βρείτε το β . (Μον. 3)

γ. i) Για $\gamma = -2$ και $\beta = 0$ να βρείτε συναρτήσεως του λ το $f(1)$ και $f(-1)$. (Μον. 4)

ii) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} (f(1) + 4)x - y = f(1) + 2 \\ 3x + f(-1)y = 1 \end{cases}$$
 για τις διάφορες τιμές του λ . (Μον. 4)

iii) Αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του συστήματος να βρείτε την τιμή λ ώστε $x_0 + y_0 = 3$. (Μον. 4)

iv) Για την τιμή του λ που βρήκατε να εξετάσετε αν η παραβολή έχει μέγιστο ή ελάχιστο. (Μον. 4)

v) Αν $\lambda = -3$ να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 + \sin x + 2 = 0$ είναι αδύνατη. (Μον. 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί w, z με $w, z \in \mathbb{C}^*$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση: $w = z + \bar{z}i$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $i\bar{w} = w$. (Μον. 4)

β) Να υπολογίσετε την τιμή $\left(\frac{w}{|w|}\right)^{2014} + \left(\frac{|w|}{w}\right)^{2014}$. (Μον. 4)

γ) Να αποδείξετε ότι ο $w \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν ο $z(1+i) \in \mathbb{R}$. (Μον. 4)

δ) Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό w που επαληθεύει την (1) και για τον οποίο ισχύει :

$$w^2 + 3w = 2\bar{w}^2 - 3 \quad (\text{Μον. 4})$$

ε) Αν w_1, w_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τη σχέση (1) αν αντικαταστήσουμε όπου $z = 1$ και $z = 2 + 3i$ αντίστοιχα, να βρείτε το $|w_1 - w_2|$. (Μον. 4)

στ) Να βρείτε τις τιμές του $v \in \mathbb{N}^*$ για τον οποίο ισχύει: $w^{2v} - |w|^{2v} = |w|^{2v} - \bar{w}^{2v}$. (Μον. 5)

EXTRA 1

A. Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x , $x^2 - 2\eta\mu\omega \cdot x - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 0$, όπου ω μια γωνία ανεξάρτητη από το x .

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις.

β. Να εκφράσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ως συνάρτηση του ω .

γ. Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι το $\frac{1}{2}$ να υπολογίσετε την τιμή του $\eta\mu\omega$.

B. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha \sin 2x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(\pi, 1)$ και $B\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$

α. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και την περίοδο της f .

γ. Να μελετηθεί η μονοτονία και το πρόσημο της f στη διάρκεια μιας περιόδου καθώς και να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ. Να σχεδιαστεί η C_f για τη διάρκεια μιας περιόδου της και να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$, για τις διαφορετικές τιμές του πραγματικών αριθμών k .