

# ΓΙΕΩΤΥΠΟ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΑ' ΛΥΚΕΙΟΥ

31/03/2018

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Κεφ. 4<sup>ο</sup> Θεωρία Σx. B, Βήμα

(Μον. 3)

**A2.** Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου, είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της.

Κεφ 5<sup>ο</sup> Θεωρία Σx. B, Βήμα

(Μον. 4)

**A3.** Να διατυπωθούν ο ορισμός και οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου και ο ορισμός του τετραγώνου . Θ. Σx. B, Βήμα

(Μον. 4)

**A4..** Να γράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό των δεδομένων της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα του δεδομένου της Στήλης Β που αντιστοιχεί (στη Στήλη Β περισσεύουν δύο όροι).

Στήλη Α:	Στήλη Β:
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ	ΚΡΙΤΗΡΙΑ
1. Παραλληλόγραμμο → α	α. Δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες.
2. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο → ε	β. Οι διαγώνιοι είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.
3. Ρόμβος → γ	γ. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
4. Τετράγωνο → στ	δ. Έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και μία του γωνία ορθή .
	ε. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του είναι ίσες.
	στ. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται, είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

(Μον. 4)

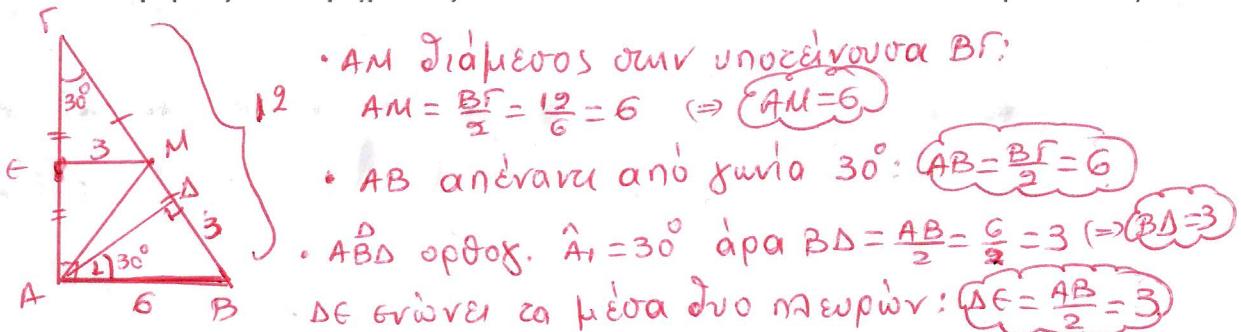
- A5. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Το άθροισμα των γωνιών ενός παραλληλογράμμου είναι  $360^\circ$
  - β. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
  - γ. Ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων των πλευρών του.
  - δ. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
  - ε. Αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοι είναι ίσες τότε είναι ορθογώνιο.

(Mov. 10)

## ΘΕΜΑ Β

B1. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $ABF$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η  $\hat{F} = 30^\circ$  και  $BF = 12\text{cm}$ . Φέρνουμε τη διάμεσο  $AM$  και το ύψος  $AD$ . Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου  $AM$ , της πλευράς  $AB$  και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $BD$ . Αν  $E$  μέσο της  $AF$  να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $ME$ .

(Mov. 12)



B2. Έστω  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από την ευθεία  $\varepsilon$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω τριγώνου  $ABF$ . Αν  $ED$  και  $GD$  είναι διχοτόμοι των γωνιών  $ZEG$  και  $EGH$  αντίστοιχα, να αποδείξετε  $ED \perp DG$ .

Τρίγωνο  $ABF$ :

$$\hat{B} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ$$

$\hat{F}, \hat{E}$  είναι και επίσης ανά

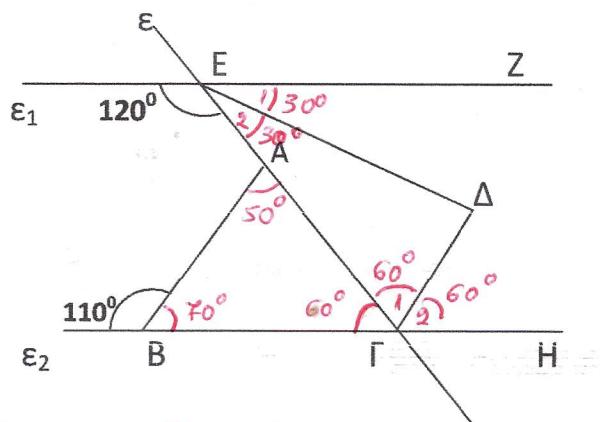
$$\hat{F} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{F} = 180^\circ - 120^\circ \Leftrightarrow \hat{F} = 60^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{F} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\hat{A} = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 50^\circ$$

•  $2\hat{E} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$  και επειδή είναι διχοτόμος

$$\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 30^\circ$$



(Mov. 13)

$\hat{E} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  και  $\Gamma\Delta$  διχοτόμος οπότε

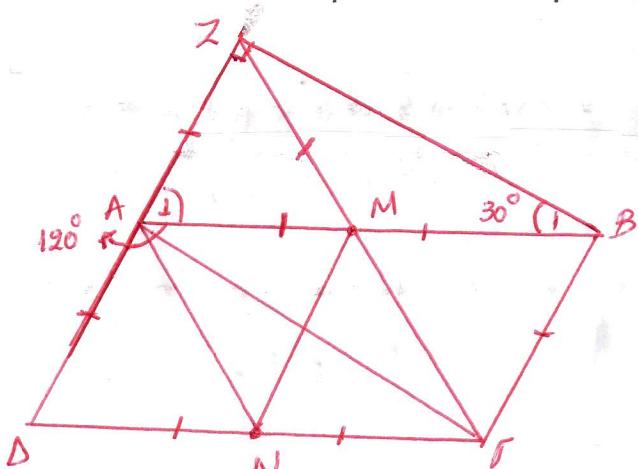
$$\hat{F}_1 = \hat{F}_2 = 60^\circ$$

$\Sigma 20^\circ \leftarrow \Delta F: \hat{A} = 180^\circ - \hat{E}_1 - \hat{F}_1 \stackrel{2}{\Leftrightarrow} \hat{A} = 90^\circ$  άρα  $\Gamma\Delta \perp ED$

## ΘΕΜΑ Γ

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = 120^\circ$  και  $AB=2AD$ , φέρουμε από την κορυφή  $B$  κάθετο τμήμα  $BZ$  στην προέκταση της  $\Delta A$ . Αν  $M$  το μέσο της πλευράς  $AB$  και  $N$  το μέσο της πλευράς  $\Gamma\Delta$  τότε:

- Γ1. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AZM$  είναι ισόπλευρο. (Mov. 6)
- Γ2. να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AZMN$  είναι ρόμβος. (Mov. 7)
- Γ3. να αποδείξετε ότι τα σημεία  $Z, M, \Gamma$  είναι συνευθειακά. (Mov. 6)
- Γ4. να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AZB\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Mov. 6)



Αφού  $AB=2AD$  τότε  
 $AM=MB=BG=GN=ND=AD$   
αφού  $M, N$  μέσα στην  $AB$  &  $\Gamma\Delta$ .

Γ1. Αφού  $\hat{A}\hat{B}=120^\circ$  τότε ( $\hat{A}_1=60^\circ$ )  
οπότε στο  $AZB$  ορθογώνιο ( $\hat{B}_1=30^\circ$ )  
 $\hat{A}BZ$  ορθογώνιο. ΑΜ διάμετρος στην  
υνοείνουσα  $AB$ :  $ZM=\frac{AB}{2}=AM$   
και  $\hat{B}_1=30^\circ$  οπότε  $AZ=\frac{AB}{2}=AM$ .  
Άρα  $AZM$  ισόπλευρο οφού  $AM=AZ=AM$

Γ2. Το  $AMN\Delta$  ηαρ/μο διότι  $AM||=DN$  αφού  $AB||=DG$

Άρα  $MN||=AD$  οπότε  $MN||=AZ$ .

Άρα στο  $AZMN$  ηαρ/μο με  $AZ=ZM$  οπότε ρόμβος.

Γ3.  $ZM||AN$  διότι  $AZMN$  ρόμβος

$MG||AN$  διότι  $AMGN$  ηαρ/μο αφού  $AM||=NG$

Άρα  $Z, M, G$  συνευθειακά διότι ανά το  $M$  μέρο μια

ηαράτητη μιορώ να φέρω προς την  $AN$ .

Γ4. Αφού  $BG||=AD$  τότε  $BG||=AZ$  οπότε στο  $AZB\Gamma$

ηαρ/μο με  $\hat{z}=90^\circ$  άρα ορθογώνιο.

## ΘΕΜΑ Δ

Σ' ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $\hat{A}B\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) φέρνουμε τμήμα  $B\Delta$  ώστε  $\hat{A}\hat{B}\Delta = \frac{1}{3}\hat{A}\hat{B}\Gamma$  (Δ σημείο της  $A\Gamma$ ). Από το Γ φέρνουμε παράλληλη στην  $AB$  που τέμνει την προέκταση της  $B\Delta$  στο Ε. Αν  $M, N, K$  τα μέσα των  $B\Gamma, \Delta E, GE$  αντίστοιχα τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι  $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{E} = 15^\circ$ .

(Mov. 3)

Δ2. Να δείξετε ότι  $B\Gamma = GN = \frac{\Delta E}{2}$ .

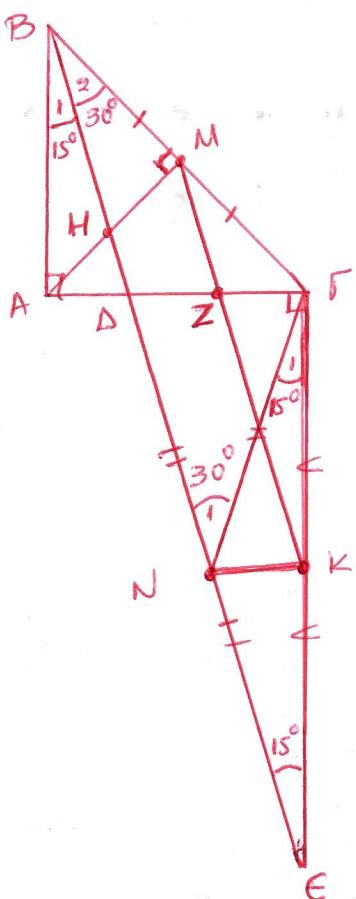
(Mov. 6)

Αν η  $MK$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$  και η  $AM$  τέμνει την  $B\Delta$  στο  $H$  τότε:

Δ3. Να δείξετε ότι  $MK // BE$  και ότι το  $Z$  είναι μέσο της  $\Delta\Gamma$ . (Mov. 6)

Δ4. Να δείξετε ότι το  $NKZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Mov. 5)

Δ5. Να δείξετε ότι  $BH = 2MH$ . (Mov. 5)



Δ1.  $\hat{A}\hat{B}\Delta = \frac{1}{3}\hat{A}\hat{B}\Gamma = \frac{1}{3}45^\circ = 15^\circ$  οπότε  $\hat{B}_2 = 30^\circ$ .  
αφού το  $\hat{A}\hat{B}\Gamma$  ορθογώνιο ήσουνετες ( $\hat{B} = \hat{F} = 45^\circ$ )  
 $GE // AB$  οπότε  $\hat{B}_1 = \hat{E} = 15^\circ$  ως γεράλδα.

Δ2. Στο  $\hat{A}\hat{B}\Gamma$  ορθογ.  $GN$  διάμερος ως  
υνοείνουσα  $\Delta E$  οπότε  $GN = \frac{\Delta E}{2} = \Delta N = NE$   
Άρα  $GN$  ισοσυνετες με  $\hat{F}_1 = \hat{E} = 15^\circ$   
Στο  $GN$  η  $\hat{N}_1$  είναι εξωζερινή οπότε  
 $\hat{N}_1 = \hat{F}_1 + \hat{E} = 15^\circ + 15^\circ \Leftrightarrow \hat{N}_1 = 30^\circ$   
Τότε  $B\hat{F}N$  ισοσυνετες,  $\hat{B}_2 = \hat{N}_1 = 30^\circ$ , με  $B\Gamma = GN$   
Άρα  $B\Gamma = GN = \frac{\Delta E}{2}$ .

Δ3. Στο  $B\hat{F}E$  η  $M$  είναι σημείο δύο  
πλευρών οπότε  $MK // BE$  ή  $MK = \frac{BE}{2}$   
Στο  $\hat{A}\hat{B}\Gamma$ , κ μέσο  $GE$ , κ  $Z$  μέσο  $\Delta\Gamma$  άρα  
Ζ μέσο  $\Delta\Gamma$ .

Δ4. Στο  $\hat{A}\hat{B}\Gamma$  κ  $NK$  είναι σημεία δύο πλευρών οπότε  
 $NK // = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow NK // = \Delta Z$  αφού  $Z$  μέσο  $\Delta\Gamma$ . Άρα  $\Delta ZKN$  παραλληλόγραμμο.

Δ5.  $\hat{A}\hat{B}\Gamma$  ισοσυνετες, αλι διάμερος άρα και υψος οπότε  $\hat{N} = 90^\circ$   
Στο  $M\hat{B}H$  ορθογ.  $\hat{B}_2 = 30^\circ$  άρα  $HM = \frac{BH}{2} \Leftrightarrow BH = 2 \cdot HM$ .