ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πρότυπο

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

10/11/2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

1) Πότε μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Θεωρία Σχ. βιβλίου . Σελ 31

2) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ελάχιστο;

Θεωρία Σχ. βιβλίου Σελ 33

3) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέγεται περιττή;

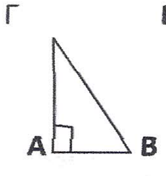
Τι είδους συμμετρία παρουσιάζει ; **Μονάδες: 6**

Θεωρία Σχ. βιβλίου Σελ 36

Α2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	−	0	−	0

Μονάδες: 6



Α3. Σε τρίγωνο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) είναι:

$\eta\mu B=\frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu B=\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε $\eta\mu\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma$ και $\varepsilon\varphi\Gamma$. **Μονάδες: 3**

$\eta\mu B=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu B=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{AB}{B\Gamma}=\frac{4}{5}$

Άρα $\eta\mu\Gamma=\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{4}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\Gamma A}{B\Gamma}=\frac{3}{5}$

$$\varepsilon\varphi\Gamma=\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\frac{AB}{B\Gamma}}{\frac{A\Gamma}{B\Gamma}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

Α4. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

Σ 1) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα τότε: $f(x+1) < f(x)$ για κάθε $x \in R$.

Σ 2) Αν οι ευθείες 2 γραμμικών εξισώσεων τέμνονται, τότε το σύστημα τους έχει μοναδική λύση.

Λ 3) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,8)$ τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Λ 4) Αν η ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι το 1 τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

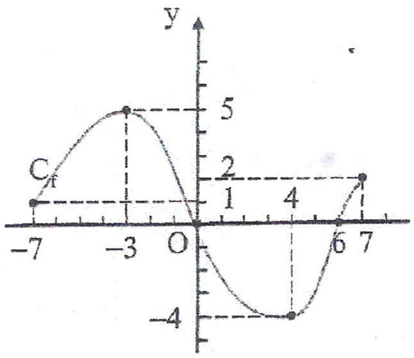
Σ 5) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και $f(1) = 0$ τότε $f(2) > 0$.

Μονάδες: 10

ΘΕΜΑ Β

B_1. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος.

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
2) Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f.
3) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
4) Να εξετάσετε αν η f έχει ακρότατα.
5) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
6) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$.



Μονάδες: 6Χ2=12

1. $A = [-7, 7]$
2. $f(A) = [-4, 5]$
3. $x \in [-7, -3]$ η f γν. αύξουσα
   $x \in [-3, 4]$ η f γν. φθίνουσα
   $x \in [4, 7]$ η f γν. αύξουσα
4. Η f στο $x = -3$ έχει μέγιστο το $f(-3) = 5$
   Η f στο $x = 4$ έχει ελάχιστο το $f(4) = -4$
5. Δεν είναι ούτε άρτια - ούτε περιττή.
6. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 6$ (σημεία τομής με τον άξονα $x'x$.)

B$_2$. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x^3 + 3y^2 = -4 \\ -x^3 + 2y^2 = 16 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (x-1)^3 + 2(y+1)^3 = 3 \\ 2(x-1)^3 - (y+1)^3 = 1 \end{cases}$

Μονάδες:(6+7) 13

α. $\left.\begin{matrix} 2x^3+3y^2=-4 \\ -x^3+2y^2=16 \end{matrix}\right\}\overset{}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} \left.\begin{matrix} 2x^3+3y^2=-4 \\ -2x^3+4y^2=32 \end{matrix}\right\} (+)$

$7y^2 = 28 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y=2$ ή $y=-2$

Τότε $2x^3+3\cdot 4 = -4 \Leftrightarrow$

$2x^3+12=-4 \Leftrightarrow 2x^3=-16 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow$

$x = -\sqrt[3]{8} = -2$

Άρα λύσεις (x,y): $(-2,-2)$ ς $(-2,2)$

β. $\left.\begin{matrix} (x-1)^3+2(y+1)^3=3 \\ 2(x-1)^3-(y+1)^3=1 \end{matrix}\right\}$ Θέτω $(x-1)^3=\alpha$, $(y+1)^3=\beta$

Άρα $\left.\begin{matrix} \alpha+2\beta=3 \\ 2\alpha-\beta=1 \end{matrix}\right\}\underset{(2)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} \alpha+2\beta=3 \\ 4\alpha-2\beta=2 \end{matrix}\right\} (+)$

$5\alpha=5 \Leftrightarrow \alpha=1$

Για $\underline{\alpha=1}$ $1+2\beta=3 \Leftrightarrow 2\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1$

Άρα $(x-1)^3=1$ και $(y+1)^3=1$.

$x-1=\sqrt[3]{1}$ και $y+1=\sqrt[3]{1}$

$x-1=1$ $y+1=1$

$x=2$ και $y=0$ λύση $(x,y)=(2,0)$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \beta x + (\beta - \alpha)y = 2\beta + 3 \\ (\alpha+\beta)x + \beta y = \alpha + \beta + 8 \end{cases}$ και οι ευθείες (ε_1): $y = \alpha x + \beta$ και (ε_2): $y = -x + 4$

Γ_1. Αν το σύστημα έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (3, 1)$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες: 8

Γ_2. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$,

1) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της ευθείας (ε_1): $y = \alpha x + \beta$ με τους άξονες. **Μονάδες: 6**
2) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2. **Μονάδες: 6**
3) Να βρείτε το εμβαδό που περικλείεται από τις ε_1, ε_2 και τον άξονα $x'x$. **Μονάδες: 5**

Γ1. Αφού έχει λύση το $(x,y)=(3,1)$ τότε $x=3$ και $y=1$

Άρα $\begin{cases} 3b + (b-a) = 2b+3 \\ (a+b)\cdot 3 + b = a+b+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b+b-a = 2b+3 \\ 3a+3b+b = a+\cancel{b}+8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -a+2b=3 \\ 2a+3b=8 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{array}{r} -2a+4b=6 \\ 2a+3b=8 \\ \hline 7b=14 \end{array}$ (+) $\Leftrightarrow b=2$ και $-a+2\cdot 2=3 \Leftrightarrow$

$\underline{\underline{a=1}}$

Γ2: $a=1, b=2$ (ε_1): $y=x+2$ (ε_2): $y=-x+4$

1) (ε_1): $y=x+2$: Με τον $x'x$: $y=0 \Leftrightarrow x=-2$ $A(-2,0)$

με τον $y'y$: $x=0$ $y=2$ $B(0,2)$

2) λύνω το (Σ) $\begin{array}{r} y=x+2 \\ y=-x+4 \\ \hline 2y=6 \end{array}$ (+) $\Leftrightarrow y=3$ και $3+x=2 \Leftrightarrow x=1$

Σημείο τομής $\Gamma(1,3)$

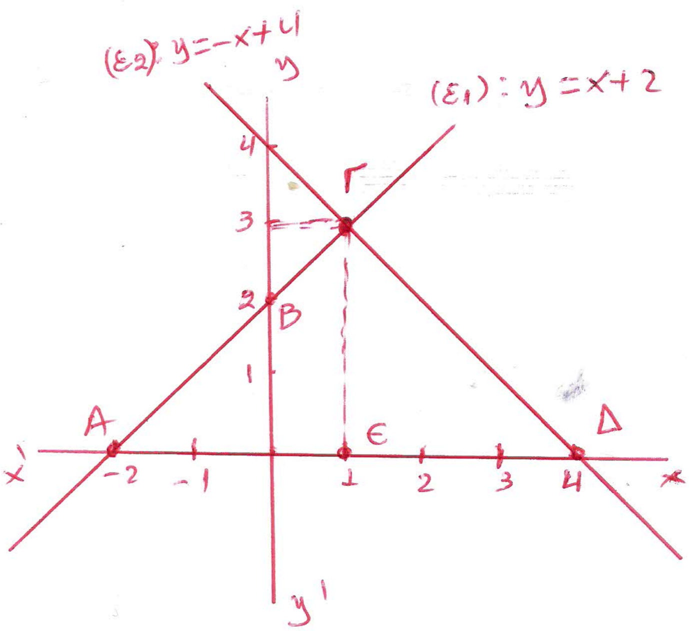
3) ε_2: $y=-x+4$

x	0	4
y	4	0

$E_{A\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} b \cdot \upsilon = \frac{1}{2} A\Delta \cdot \Gamma E$.

$E_{A\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} 6 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$E_{A\Gamma\Delta} = 9$ τ.μ.



ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x^2}{2}+k$ με $\kappa \in \mathbb{R}$, η οποία διέρχεται από το σημείο $M(3,\frac{5}{2})$.

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να προσδιορίσετε το k. **Μονάδες:5**

Αν $k=-2$

Δ2.Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ ή κέντρο συμμετρίας το $0(0,0)$. **Μονάδες: 5**

Δ3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. **Μονάδες: 5**

Δ4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f. **Μονάδες: 5**

Δ5. Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες: 5**

Δ1. $A_f=\mathbb{R}$ διότι είναι πολυωνυμική

Διέρχεται $M(3,\frac{5}{2})$: $f(3)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3^2}{2}+k=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2}+k=\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$k=\frac{5}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{4}{2} \Leftrightarrow \underline{k=-2}$.

Δ2. $f(x)=\frac{x^2}{2}-2$

Εξετάζω αν είναι άρτια ή περιττή.

$f(-x)=\frac{(-x)^2}{2}-2=\frac{x^2}{2}-2=f(x)$, άρα άρτια.

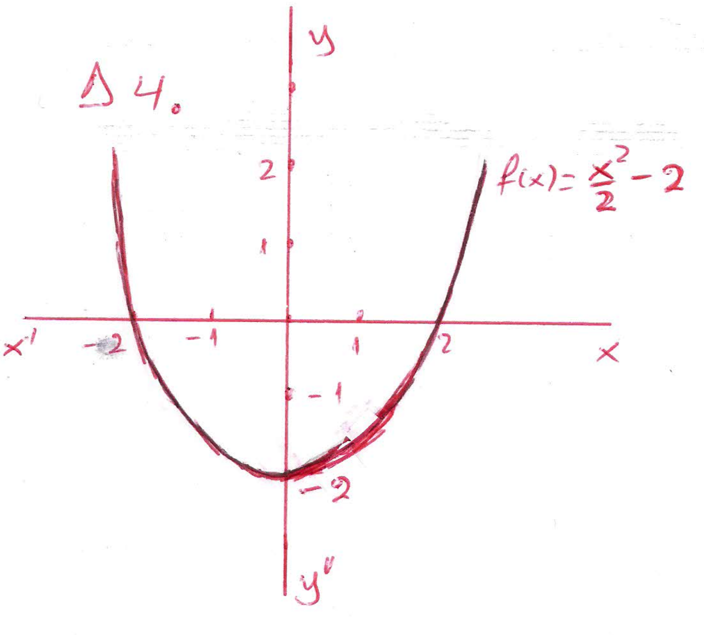
Έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Δ3. Με τον $x'x$: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}-2=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}=2 \Leftrightarrow$

$x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$ Άρα $(-2,0)$ και $(2,0)$

Με τον $y'y$: $x=0$ $f(0)=\frac{0^2}{2}-2=-2$. Δηλαδή $(0,-2)$

Δ4.



Δ5. Για $x\in(-\infty,0]$ η f γν. φθίνουσα

Για $x\in[0,+\infty)$ η f γν. αύξουσα

Στο $x=0$ η f έχει ελάχιστο το $f(0)=-2$.

Μέγιστο δεν έχει.