πρότυπο

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ
26/10/2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Πότε δύο αριθμοί α, β λέγονται αντίθετοι και πότε αντίστροφοι; (Μονάδες 4)

β. Πότε λέμε ότι ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β; (Μονάδες 3)

Α2. Να μεταφέρετε , στο γραπτό σας, συμπληρωμένες τις παρακάτω ισοδυναμίες ώστε να ισχύουν για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Α) $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$

Β) $\alpha^2+\beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

Γ) $\alpha\beta=0 \Leftrightarrow$

Δ) $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow$ (Μονάδες 4)

Α3. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:
α) $\alpha^2 - \beta^2$=……
β) $(\alpha - \beta)^2$ ……
γ) $\alpha^3 - \beta^3$ =……
δ) $(\alpha - \beta)^3$=……. (Μονάδες 4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ):
α) Αν α > β και γ <0 τότε α+γ > β+γ
β) Αν α , β ετερόσημοι τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$
γ) Ισχύει ότι : $2^{-3} = -8$
δ) Ισχύει ότι: $x^2 - y^2 = (x - y)^2$.
ε) Αν $x \cdot y = 1$ τότε οι x, y είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να γίνουν οι πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

1. $A = \frac{x^3-4x}{x^3-x} \cdot \frac{x^2-x}{x^2-2x}$ (Μονάδες 4)

2. $B = \frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-9} : \frac{x^3+x^2}{x^2+3x}$ (Μονάδες 6)

Β2. α) Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{\alpha+\beta}{5}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \cdot \alpha \cdot \beta$. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \left(\frac{2026}{5}\right)^2 - \left(\frac{2024}{5}\right)^2$. (Μονάδες 3)

Β3. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x, y \neq 0$,και $x \neq y$, ισχύει: $\frac{x}{y} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\alpha = \frac{1+2025^2}{1+\left(\frac{1}{2025}\right)^2}$ (Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta+1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha+2)^2 + 1$. (Μονάδες 3)

β. i.Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 4)

Γ2. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $1 \leq \beta \leq 3$,

α. να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης: $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 4)

β. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος α εκατοστά και πλάτος β εκατοστά, αντίστοιχα. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 5)

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta + 6 \leq 3\alpha + 2\beta$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y να αποδείξετε ότι: $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$

(Μονάδες 6)

Δ2. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x, y \neq 0$, ισχύει: $A = \frac{x^{-2} + y^{-2}}{(xy)^{-1}}$

Α. Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ (Μονάδες 8)

Β. Αν οι αριθμοί x, y είναι ετερόσημοι να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -2$. (Μονάδες 6)

Γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι οι αριθμοί x, y είναι αντίθετοι να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{x}{y} = -1$ (Μονάδες 3)

β. A= -2 (Μονάδες 2)